Выпуклая геометрия

Терминология. Каждый отличный от константы аффинный функционал $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задаёт аффинную гиперплоскость $H_a = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) = 0\}$ и замкнутое полупространство $H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geqslant 0\}$. Гиперплоскость H_a и полупространство H_a^+ называются *опорными* для фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, если $H_a \cap \partial\Phi \neq \varnothing$ и $\Phi \subseteq H_a^+$. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с какой-либо её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ. Под *размерностью* грани понимается размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Нульмерные грани называются *вершинами*. Под внутренними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного пространства, содержащего эту грань. Точка $p \in \Phi$ называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры Φ, если p не является внутренней точкой никакого отрезка, содержащегося в Φ.

ГС12◇1. Докажите, что аффинное отображение переводит выпуклую фигуру в выпуклую.

ГС12◇2. Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является замыканием множества своих внутренних точек, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является замыканием множества своих внутренних точек.

ГС12◇3. Покажите, что в любом семействе параллельных гиперплоскостей $(n, x) = c$, где вектор $n \in \mathbb{R}^n$ фиксирован, а параметр c пробегает $\mathbb{R}$, всегда есть одна или две опорных гиперплоскости к произвольно заданной ограниченной выпуклой фигуре $\Phi \subset \mathbb{R}^n$.

ГС12◇4. Верно ли, что вершины являются крайними точками? Верно ли обратное?

ГС12◇5. Покажите, что у замкнутой выпуклой фигуры Φ **а)** грань её грани может не быть гранью для Φ **б)** крайние точки любой грани являются крайними и для Φ.

ГС12◇6. Приведите пример замкнутой выпуклой фигуры Φ с незамкнутым множеством **а)** вершин **б)** крайних точек.

ГС12◇7. Покажите, что ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

ГС12◇8 (лемма Радона). Докажите, что любой конечный набор из не менее $n+2$ различных точек в $\mathbb{R}^n$ всегда разбивается на два непересекающихся поднабора с пересекающимися выпуклыми оболочками.

ГС12◇9*. Дана прямоугольная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ и столбец $b \in \mathbb{R}^m$ (той же высоты, что и матрица). Докажите, что система неравенств $Ax \leqslant b$ на столбец $x \in \mathbb{R}^n$

а) задаёт непустой многогранник в $\mathbb{R}^n$ если и только если для любой строки $y \in \mathbb{R}^{m*}$ из m неотрицательных чисел, такой что $yA = 0$, выполняется неравенство $yb \geqslant 0$

б) имеет решение, все координаты которого неотрицательны, если и только если $yb \geqslant 0$ для любой удовлетворяющей неравенствам $yA \geqslant 0$ строки $y \in \mathbb{R}^n$, все координаты которой неотрицательны.

ГС12◇10* (двойственность Гейла, или бескоординатный взгляд на зад. ГС12◇9). Рассмотрим двойственные координатные векторные пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n*}$, подпространства $U \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{Ann}\,U \subset \mathbb{R}^{n*}$, и классы $[w] = w + U \in \mathbb{R}^n/U \simeq (\mathrm{Ann}\,U)^*$ и $[\xi] = \xi + \mathrm{Ann}\,U \in \mathbb{R}^{n*}/\mathrm{Ann}\,U \simeq U^*$. Функционал $[\xi] : U \to \mathbb{R}$ задаёт на аффинном подпространстве $w + U \subset \mathbb{R}^n$ предпорядок $\leqslant_{[\xi]}$, в котором $p \leqslant_{[\xi]} q$ если и только если $\xi(\overrightarrow{pq}) \geqslant 0$, а функционал $[w] : \mathrm{Ann}\,U \to \mathbb{R}$ задаёт на аффинном подпространстве $\xi + \mathrm{Ann}\,U \subset \mathbb{R}^{n*}$ предпорядок $\leqslant_{[w]}$, в котором $\varphi \leqslant_{[w]} \psi$ если и только если $\varphi(w) \leqslant \psi(w)$. Обозначим через $\sigma_+ \subset \mathbb{R}^n$ и $\sigma_+^\vee \subset \mathbb{R}^{n*}$ положительные гипероктанты, состоящие из векторов, все координаты которых неотрицательны, и рассмотрим *двойственные по Гейлу* многогранники $M_{[w]} = (w+U)\cap\sigma_+$ и $M^{\vee}_{[\xi]} = (\xi+\operatorname{Ann} U)\cap\sigma^{\vee}_+$.

а) Покажите, что $M_{[w]} \neq \varnothing$ если и только если для всех $\xi \in U^*$ с $M^{\vee}_{[\xi]} \neq \varnothing$ в многограннике $M^{\vee}_{[\xi]}$ есть $\leqslant_{[w]}$-минимальные точки[1].

б) Пусть $M_{[w]} \neq \varnothing$ и $M^{\vee}_{[\xi]} \neq \varnothing$. Покажите, что множество $\Gamma_{[\xi]}$ всех $\leqslant_{[\xi]}$-минимальных точек в $M_{[w]}$ и множество $\Gamma_{[w]}$ всех $\leqslant_{[w]}$-минимальных точек в $M^{\vee}_{[\xi]}$ являются гранями этих многогранников, и для каждого $i = 1,\dots,n$ справедливо следующее утверждение: если на грани $\Gamma_{[\xi]}$ есть точка с ненулевой i-й координатой, то i-е координаты *всех* точек грани $\Gamma_{[w]}$ нулевые и наоборот.

в) Что это всё означает для подпространства $U \subset \mathbb{R}^n$, порождённого строками $m\times n$ матрицы A, и для подпространства $U \subset \mathbb{R}^n$, заданного системой уравнений $Ax = 0$?

[1] В этом случае часто говорят, что «w ограничен снизу на многограннике $M^{\vee}_{[\xi]}$».