

### Линейные операторы

**Терминология.** С каждым линейным оператором  $F : V \rightarrow V$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  связаны *характеристический многочлен*  $\chi_F(t) = \det(t \text{Id}_V - F) \in \mathbb{k}[t]$ , а также аннулирующий  $F$  многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, который обозначается  $\mu_F(t) \in \mathbb{k}[t]$  и называется *минимальным многочленом* оператора  $F$ . Корни характеристического многочлена называются *собственными числами*<sup>1</sup> оператора  $F$ . Множество собственных чисел оператора  $F$  называется его *спектром* и обозначается  $\text{Spec } F$ . Для каждого  $\lambda \in \text{Spec } F$  подпространство  $V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\lambda \text{Id}_V - F) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$  называется *собственным подпространством* оператора  $F$ , а подпространство  $K_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{m \geq 1} \ker(\lambda \text{Id}_V - F)^m$  — *корневым подпространством* оператора  $F$  с собственным числом  $\lambda$ . Векторы  $v \in V_\lambda$  называются *собственными векторами* с собственным значением  $\lambda$ . Оператор  $F$  называется *диагонализуемым*, если в  $V$  имеется базис из собственных векторов оператора  $F$ . Подпространство  $U \subset V$  называется *F-инвариантным*, если  $F(U) \subset U$ .

**ГС9♦1.** В пространстве  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$  многочленов степени не выше  $n$  с вещественными коэффициентами найдите собственные числа и собственные подпространства линейных операторов

а)  $f(x) \mapsto f(ax+b)$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  — заданные числа б)  $f(x) \mapsto xf'(x)$  в)  $f(x) \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$

**ГС9♦2.** Найдите собственные числа, собственные и корневые подпространства<sup>2</sup> и выясните, диагоналізуем ли линейный оператор  $F : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$  с матрицей

а)  $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -18 & -9 & 1 \end{pmatrix}$  б)  $\begin{pmatrix} -2 & 16 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  в)  $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & -5 \\ 2 & 20 & -12 \end{pmatrix}$  г)  $\begin{pmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -14 & -5 & -10 \\ 14 & 8 & 13 \end{pmatrix}$   
 д)  $\begin{pmatrix} 12 & -21 & -8 & 0 \\ 10 & -19 & -8 & 0 \\ -12 & 24 & 11 & 0 \\ -10 & 30 & 20 & -1 \end{pmatrix}$  е)  $\begin{pmatrix} -8 & -12 & -1 & 1 \\ 7 & 11 & 1 & -1 \\ -14 & -24 & -3 & 2 \\ -3 & -9 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  ж)  $\begin{pmatrix} 13 & -8 & -2 & 2 \\ 33 & -20 & -5 & 4 \\ -18 & 10 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 13 & 4 \end{pmatrix}$

**ГС9♦3.** Найдите размерности корневых подпространств и минимальный многочлен линейного оператора  $F : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$ , имеющего в стандартном базисе матрицу

а)  $\begin{pmatrix} -9 & -5 & -11 & 6 \\ 27 & 14 & 27 & -14 \\ -25 & -12 & -22 & 11 \\ -37 & -18 & -35 & 18 \end{pmatrix}$  б)  $\begin{pmatrix} -11 & -5 & 0 & -2 \\ 40 & 17 & 2 & 4 \\ -24 & -8 & -5 & 4 \\ -28 & -10 & -5 & 3 \end{pmatrix}$  в)  $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 1 \\ -21 & -10 & -12 & -3 \\ -17 & -5 & 3 & 1 \\ -29 & -11 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

**ГС9♦4.** Найдите характеристический многочлен оператора умножения на класс  $[x]_f$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[x]/(f)$ , где  $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$  — заданный многочлен.

**ГС9♦5.** Найдите степень минимального многочлена оператора ранга 1.

**ГС9♦6.** Пусть оператор  $F$  аннулируется многочленом  $f(t) \in \mathbb{k}[t]$ . Покажите, что а) все собственные числа  $F$  являются корнями  $f$  б)  $f$  делится в  $\mathbb{k}[t]$  на  $\mu_F$ .

**ГС9♦7.** Пусть подпространство  $U \subset V$  инвариантно относительно оператора  $F : V \rightarrow V$ . Докажите, что а) характеристический многочлен ограничения  $F|_U : U \rightarrow U$  делит характеристический многочлен оператора  $F$  б) если  $F$  диагонализуем, то и  $F|_U$  диагонализуем.

**ГС9♦8.** Опишите все инвариантные подпространства и минимальный многочлен диагоналируемого оператора.

**ГС9♦9.** Существует ли оператор  $F$  с характеристическим и минимальным многочленами

а)  $\chi(t) = (t^6 - 1)$ ,  $\mu(t) = (t^3 - 1)$  б)  $\chi(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$ ,  $\mu(t) = (t - 1)(t - 2)$   
 в)  $\chi(t) = (t - 1)^5(t - 2)^5$ ,  $\mu(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$ ? Если да, то приведите пример.

<sup>1</sup>Или *собственными значениями*.

<sup>2</sup>Т. е. явно укажите в них какие-нибудь базисы.