

Определители

ГС8♦1. Вычислите а) $\det \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\det \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ в) $\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
 г) $\det \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ д) $\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ е) $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ж) $\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

ГС8♦2. Найдите а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ в) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$ г) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$
 д) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ е) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ ж) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 4 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

ГС8♦3. При помощи правила Крамера решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 20 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ -3x_1 - 9x_2 - 8x_3 = -17 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ -3x_1 - 9x_2 - 8x_3 = -17 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$
 г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

ГС8♦4. Вычислите $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$, $C \in \text{Mat}_m(\mathbb{k})$, $B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$.

ГС8♦5. Найдите а) $\text{sgn}(n, (n-1), \dots, 2, 1)$ б) $\det \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ в) $\text{sgn}(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$, где оба набора индексов i_1, \dots, i_k и j_1, \dots, j_{n-k} строго возрастают.

ГС8♦6. Даны два набора чисел a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n из поля \mathbb{k} . Вычислите

а) $\det(\alpha_i \beta_j)$ б) $\det(\cos(\alpha_i - \beta_j))$

ГС8♦7. Вычислите определитель матрицы с нулями на главной диагонали и единицами в остальных местах.

ГС8♦8. Найдите а) $\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{x+z}{2} & \frac{x+y}{2} & \frac{y+z}{2} & 1 \end{pmatrix}$ б) $\det \begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & y \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$ в) $\det \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

ГС8♦9 (определитель Вандермонда). Вычислите $\det(x_i^{j-1}) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$.

ГС8♦10. Покажите, что числа Фибоначчи суть определители тридиагональных матриц с единицами по главной диагонали и над ней и минус единицами под ней.

ГС8♦11. Вычислите а) $\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}}$ б) $\frac{\partial^2 \det(A)}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}}$.

ГС8♦12. Докажите, что дополнительные миноры обратных друг другу матриц A и $B = A^{-1}$ связаны соотношением $a_{IJ} = (-1)^{|I|+|J|} b_{\bar{I}\bar{J}}$.