Двойственность

Терминология и обозначения. Для векторного пространства V над полем $\Bbbk$ пространство линейных функций $V \to \Bbbk$ обозначается V^* и называется *двойственным* к V, а элементы этого пространства называются *ковекторами* или *линейными функционалами* на V. Значение ковектора $\xi \in V^*$ на векторе $v \in V$ иначе обозначается через $\langle\, \xi\,,\, v\,\rangle \overset{\text{def}}{=} \xi(v) \in \Bbbk$ и называется *свёрткой*. Для линейного отображения $F : U \to W$ линейное отображение $F^* : W^* \to U^*$, $\xi \mapsto \xi \circ F$, называется *двойственным* к F. Таким образом, $\langle\, F^*\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, Fv\,\rangle$ для всех $\xi \in V^*$ и $v \in V$. Если $\dim V = n$, то наборы векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots e_n)$ в V и $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, \dots e_n^*)$ в V^* называются *двойственными базисами* если $\langle\, e_i^*\,,\, e_j\,\rangle = \delta_{ij}$, где *символ Кронекера* δ_{ij} равен 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Сопоставление вектору $v \in V$ функционала вычисления $\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk$, $\xi \mapsto \langle\, \xi\,,\, v\,\rangle$, вкладывает V в V^{**}. Если $\dim V < \infty$, это вложение является изоморфизмом. Для $W \subset V$ и $M \subset V^*$ подпространства $\operatorname{Ann} W \overset{\text{def}}{=} \{\xi \in V^* \mid \forall w \in W\ \langle\, \xi\,,\, w\,\rangle = 0\} \subset V^*$ и $\operatorname{Ann} M \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall \psi \in M\ \langle\, \psi\,,\, v\,\rangle = 0\} \subset V$ называются *аннуляторами* множеств W и M. Сопоставление подпространству его аннулятора является инволютивной оборачивающей включения биекцией между подпространствами коразмерности k в V и размерности k в V^*. Эта биекция переводит суммы в пересечения, а пересечения в суммы.

ГС7◇1. Убедитесь, что двойственные базисы действительно являются базисами.

ГС7◇2. Опишите двойственный оператор к оператору гомотетии $\Gamma_\lambda : V \to V$, $v \mapsto \lambda v$.

ГС7◇3. Линейное отображение $F : U \to W$ имеет в базисах $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ матрицу $F_{\boldsymbol{wu}}$. Найдите матрицу $F^*_{\boldsymbol{w}^*\boldsymbol{u}^*}$ двойственного отображения $F^* : W^* \to U^*$ в двойственных базисах $\boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{u}^*$.

ГС7◇4. Выясните, как связаны друг с другом ядра и образы двойственных операторов и выведите из этого теорему о ранге матрицы: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^t$.

ГС7◇5. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Bbbk$ различны, $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ и $V = \Bbbk[x]/(f)$. **а)** Покажите, что функционалы вычисления $\varepsilon_i : V \to \Bbbk$, $[g] \mapsto g(\alpha_i)$, корректно определены и образуют базис в V^*. **б)** Найдите двойственный к нему базис в V. **в)** В базисе $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ напишите матрицы операторов $V^* \to V^*$, двойственных к операторам умножения на классы $[x - \alpha_1]$, $[(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)]$, $[x]$.

ГС7◇6. Каким наименьшим числом уравнений задаётся **а)** сумма **б)** пересечение линейных оболочек векторов $(1,1,6,2)$, $(1,1,6,3)$, $(2,3,15,1)$, $(2,4,18,-1)$ и векторов $(1,-2,-2,5)$, $(2,-4,-3,9)$, $(-3,6,8,-17)$, $(-3,6,5,-14)$ в $\mathbb{Q}^4$.

ГС7◇7. В $\mathbb{Q}^5$ найдите размерность суммы и пересечения пространств решений систем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - 10x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 16x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 30x_5 = 0 \end{cases}$$

ГС7◇8. Покажите, что ограничения линейных функционалов $\xi_1, \dots, \xi_m$ на линейную оболочку векторов $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы строки матрицы $\big(\langle\, \xi_i\,,\, u_j\,\rangle\big) \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ и выведите из этого теорему о ранге матрицы.

ГС7◇9. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$. Покажите, что сопоставление ковектору $\varphi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$ экспоненциальной производящей функции $\varphi(t) = \sum_{k\geqslant 0} \langle\, \varphi\,,\, x^k\,\rangle\, t^k / k! \in \Bbbk[\![t]\!]$ задаёт изоморфизм $\Bbbk[x]^* \simeq \Bbbk[\![t]\!]$, и докажите линейную независимость над $\Bbbk$ множества **а)** функционалов вычисления $\mathrm{ev}_\alpha : \Bbbk[x] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(\alpha)$, где $\alpha \in \Bbbk$ **б)** степенных рядов $e^{\lambda t}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

ГС7◇10. В условиях предыдущей задачи опишите оператор $\Bbbk[\![t]\!] \to \Bbbk[\![t]\!]$, двойственный к

а) оператору дифференцирования $\frac{d}{dx} : \Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$, $f \mapsto f'$

б) оператору умножения на $x : \Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$, $f \mapsto xf$

в) оператору $x\frac{d}{dx} : \Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$, $f \mapsto xf'$.

Найдите ядра и образы всех шести операторов.