

Линейные отображения и матрицы

ГС5♦1. Матрица A состоит из трёх столбцов a_1, a_2, a_3 . На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу A , чтобы получилась матрица **а)** из трёх столбцов $a_3, 0, a_1$ **б)** из пяти столбцов $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1, a_1 + a_2 + a_3, -3a_2 + 2a_3$.

ГС5♦2. Матрица A состоит из четырёх строк a_1, a_2, a_3, a_4 (строки выписаны сверху вниз). На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу A , чтобы получилась матрица **а)** из двух строк $a_1 + 2a_2 + 3a_3, a_4 - 2a_3 + 3a_2$ **б)** из трёх строк $a_4, a_3 - a_2, a_1$.

Обозначения. Пусть набор векторов $e = (e_1, \dots, e_m)$ образует базис векторного пространства U , а набор векторов $f = (f_1, \dots, f_k)$ — базис векторного пространства W . Матрица F_{fe} линейного отображения $F : U \rightarrow W$ в этих двух базисах определяется равенством $F(e) = f F_{fe}$, где $F(e) \stackrel{\text{def}}{=} (F(e_1), \dots, F(e_m))$ — матрица-строка, составленная из векторов $F(e_j)$. Матрица F_{fe} имеет размер $k \times m$, и в её j -м столбце стоят коэффициенты линейного выражения вектора $F(e_j)$ через базис f . Вектор $v = \sum e_i x_i = ex$ переводится отображением F в вектор $F(v) = fy$ со столбцом координат $y = F_{fe}x$. Если наборов векторов $u = (u_1, \dots, u_m)$ лежит в линейной оболочке $\text{Span}(w)$ набора векторов $w = (w_1, \dots, w_k)$, то матрица перехода C_{wu} от векторов u к векторам w имеет размер $k \times m$ и определяется равенством $u = w C_{wu}$. В её j -м столбце стоят коэффициенты линейного выражения вектора u_j через векторы w . Каждый вектор $v = \sum u_i x_i = ux \in \text{Span}(u)$ выражается через векторы w как $v = wy$, где столбец $y = C_{wu}x$.

ГС5♦3. Рассмотрим разностный оператор $\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x - 1)$ на пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ многочленов степени ≤ 3 с коэффициентами в \mathbb{Q} . Напишите его матрицу в стандартном базисе x^i , где $0 \leq i \leq 3$ и $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$, а также в базисе $\binom{x+k}{k} = (x+1) \dots (x+k)/k!$, где $0 \leq k \leq 3$ и $\binom{x}{0} = 1$. Напишите матрицы переходов между этими базисами. Найдите $\ker \nabla$ и $\text{im } \nabla$.

ГС5♦4. Рассмотрим оператор умножения на $x : f \mapsto xf$ в кольце вычетов $\mathbb{Q}[x]/((x-2)^4)$. Напишите его матрицу в базисе $x^i, 0 \leq i \leq 4$, и в базисе $(x-2)^i, 0 \leq i \leq 4$, а также матрицы переходов между этими базисами. Найдите $\ker x$ и $\text{im } x$.

ГС5♦5. Пусть $\dim U = n, \dim W = m$, а подпространства $U_0 \subseteq U$ и $W_0 \subseteq W$ имеют $\dim U_0 = n_0$ и $\dim W_0 = m_0$. Покажите, что линейные отображения $F : U \rightarrow W$ с $\ker F \supseteq U_0$ и $\text{im } F \subseteq W_0$ образуют векторное подпространство в $\text{Hom}(U, W)$, и найдите его размерность.

ГС5♦6. Покажите, что следующие свойства матрицы эквивалентны: **а)** все столбцы пропорциональны **б)** все строки пропорциональны **в)** матрица является произведением столбца и строки, и если квадратная матрица A имеет эти свойства, то она пропорциональна A^2 .

ГС5♦7. Опишите центр $\{C \in \text{Mat}_n(\mathbb{k}) \mid \forall X \in \text{Mat}_n(\mathbb{k}) CX = XC\}$ алгебры $n \times n$ матриц.

ГС5♦8. Пусть квадратная матрица A такова, что $A^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Обязательно ли матрица $E + A$ обратима?

ГС5♦9. Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу размера $n \times n$ с единицей в клетке (i, j) и нулями в остальных клетках. Составьте таблицу умножения матриц E_{ij} .

ГС5♦10. Вычислите **а)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$ **г)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$ **д)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2021}$.

ГС5♦11. При каких $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ матрица $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ обратима? Явно вычислите обратную матрицу, когда она существует.

ГС5♦12. Подсчитайте количество 3×3 матриц ранга 2 над полем из q элементов.

ГС5♦13. Докажите правила Лейбница: **а)** $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ **б)** $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$ для коммутатора $[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$ квадратных матриц $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$.

ГС5♦14. Сумма $\text{tr } A \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_{ii}$ называется следом квадратной матрицы A . Покажите, что **а)** $\text{tr}[A, B] = 0 \forall A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ **б)** $\text{tr}(CAC^{-1}) = \text{tr}(A) \forall A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ и $\forall C \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$.