

ПРОГРАММА ПЕРВОГО СЕМЕСТРА КУРСА

«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю
темы, набранные курсивом могут стать необязательными или упраздниться вовсе

ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ (7 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Двумерное векторное пространство \mathbb{K}^2 : пропорциональность векторов, определитель 2×2 , базисы и координаты, правило Крамера, форма площади. Аффинное пространство \mathbb{K}^2 : аффинный репер и аффинные координаты, деление отрезка в заданном отношении, прямые и их уравнения, площади треугольников и многоугольников. Центр тяжести и барицентрические координаты.

НЕДЕЛЯ 2. Преобразования, переводящие прямые в прямые (полуаффинные преобразования). *Алгебраическое отступление: автоморфизмы полей*. Линейные и аффинные преобразования плоскости, дифференциал аффинного преобразования. Замены координат. Матричная запись линейных и аффинных преобразований.

НЕДЕЛЯ 3. Скалярное произведение, существование ортонормального базиса, неравенства Коши – Буныковского – Шварца и треугольника, квадрат евклидовой площади равен определителю Грама. Угол между векторами. Ещё раз об уравнении прямой, угол между прямыми. Геометрическое описание поля комплексных чисел, евклидова плоскость = комплексная прямая. Движения и подобия.

КОНТРОЛЬНАЯ №1 «ПЛАНИМЕТРИЯ».

НЕДЕЛЯ 4. Определение и примеры векторных пространств: «школьные свободные векторы», координатные пространства, матрицы, многочлены и степенные ряды, вложения полей. Порождающие наборы векторов, линейная зависимость, лемма о замене, существование и свойства базисов, размерность. Аффинные пространства и аффинные реперы. Векторные и аффинные подпространства: размерность суммы и пересечения, взаимное расположение, трансверсальность и прямая сумма векторных подпространств.

НЕДЕЛЯ 5. Линейные отображения, размерность ядра и образа, непустые слои являются сдвигами ядра. Матричные обозначения для линейных отображений, размерность пространства линейных отображений, произведение матриц и композиция отображений. Матричные обозначения для линейных выражений одних векторов через другие (матрицы перехода). Алгебра матриц, обратная матрица, критерии обратимости, *обращение верхней унитарной матрицы над произвольным ассоциативным кольцом с единицей*.

НЕДЕЛЯ 6. Матричная запись и геометрическая интерпретация систем линейных уравнений и их решений, критерии совместности и оценка размерности пространства решений. Задание векторных и аффинных подпространств линейными уравнениями, взаимное расположение аффинных подпространств. Фактор пространства.

НЕДЕЛЯ 7. Доделка недоделок (резервная неделя).

СЕССИОННАЯ НЕДЕЛЯ. Коллоквиум по материалу первой четверти.

ВТОРАЯ ЧЕТВЕРТЬ (8 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Метод Гаусса: отыскание базиса подпространства в \mathbb{K}^n и фактора \mathbb{K}^n по этому подпространству, отыскание базисов в ядре и образе линейного оператора, обращение матрицы, решение систем линейных уравнений. Ранг матрицы. *Комбинаторный тип подпространства относительно базиса и единственность базиса с приведённой ступенчатой матрицей координат.*

КОНТРОЛЬНАЯ №2 «МАТРИЦЫ И МЕТОД ГАУССА».

НЕДЕЛЯ 2. Двойственное пространство, примеры линейных форм. Вложение $V \hookrightarrow V^{**}$, *продвинутый пример: многочлены и степенные ряды, теневой анализ.* Изоморфизм $V \simeq V^{**}$ для конечномерного V , двойственный базис, примеры двойственных базисов, координаты линейной формы в двойственном базисе. Описание двойственного пространства к линейной оболочке заданного набора векторов, ранг матрицы. Пространство, двойственное к подпространству. Аннуляторы, биекция $U \leftrightarrow \text{Ann } U$ обращает включения и переводит суммы в пересечения и наоборот. Двойственные линейные отображения, связь между их ядрами и образами. Ещё раз о системах линейных уравнений, методе Гаусса и явном отыскании базисов в пересечениях и суммах подпространств и в фактор пространствах.

НЕДЕЛЯ 3. Объём ориентированного параллелепипеда, полилинейные кососимметричные и знакопеременные формы, пространство кососимметричных n -линейных форм на n -мерном пространстве одномерно. *Алгебраическое отступление: знак перестановки, «правило ниточек» и знак тасующей перестановки.* Определитель матрицы и его простейшие свойства: полилинейность, инвариантность относительно транспонирования, мультипликативность. Техника вычисления определителей. Отношение объёма симплекса к объёму параллелепипеда (над \mathbb{R}).

НЕДЕЛЯ 4. Правила Крамера, «векторные произведения», присоединённая матрица, тождество $A \cdot A^\vee = \det A \cdot E$. Матрицы с элементами в алгебре многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона–Кэли (подстановка $t = A$ в равенство $\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^\vee$). Грассмановы многочлены, линейные замены переменных и миноры, разложение определителя по набору строк или столбцов. *Определитель пучка матриц.*

НЕДЕЛЯ 5. Собственные числа и собственные подпространства линейных операторов. Характеристический и минимальный многочлены. Разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств по разложению аннулирующего многочлена на множители. Критерии диагонализуемости, примеры диагонализуемых и недиагонализуемых операторов. Цикловой тип нильпотентного оператора.

НЕДЕЛЯ 6. Корневое разложение. Вычисление аналитических функций от операторов и матриц с помощью полиномиальной интерполяции. Общие собственные векторы коммутирующих операторов, одновременная диагонализация произвольного множества коммутирующих диагонализуемых операторов. *Разложение Жордана и жорданова нормальная форма.*

КОНТРОЛЬНАЯ №3 «ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ОПЕРАТОРЫ».

НЕДЕЛЯ 7. Евклидовы пространства: ортогонализация, евклидов объём и ориентация, матрицы Грама и как они преобразуются при замене координат, определитель Грама равен квадрату евклидова объёма, вычисление углов и расстояний между подпространствами, общий перпендикуляр к набору векторов. Евклидова геометрия пространства \mathbb{R}^3 : уравнения прямых и плоскостей, углы и расстояния между ними, векторное произведение.

НЕДЕЛЯ 8. Доделка недоделок (резервная неделя).

СЕССИОННАЯ НЕДЕЛЯ. Итоговый письменный экзамен за первый семестр.