

## Линейные отображения и матрицы

- ГЛ4♦1.** На клетчатой бумаге нарисован по линиям сетки прямоугольник и во все внешние клетки, имеющие общую сторону с его контуром, записаны числа. Всегда ли возможно написать в каждую клетку прямоугольника по числу так, чтобы любое из них равнялось среднему арифметическому чисел из четырёх клеток, имеющих общую сторону с рассматриваемой? Если да, то сколько имеется способов это сделать?
- ГЛ4♦2.** Вершины куба надписаны числами  $b_1, \dots, b_8$ . При каких условиях на эти числа можно написать ещё шесть чисел на грани так, чтобы число в каждой из вершин оказалось равно сумме чисел на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Найдите все наборы  $b_1, \dots, b_8$ , для которых задача имеет решение, и для каждого из них найдите все решения задачи.
- ГЛ4♦3.** Имеется 7 одинаковых банок, каждая из которых на  $9/10$  заполнена краской одного из семи цветов радуги, в разных банках — разные цвета. Можно ли, переливая краску из банки в банку и равномерно размешивая содержимое после каждого переливания, получить хотя бы в одной из банок колер, где все семь цветов представлены в равной пропорции?
- ГЛ4♦4.** Докажите, что любую матрицу ранга  $r$  можно представить в виде суммы  $r$  матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.
- ГЛ4♦5.** Обозначим через  $U_1, U_2 \subset \mathbb{k}^n$  и  $W_1, W_2 \subset \mathbb{k}^m$  линейные оболочки строк и столбцов матриц  $A_1, A_2 \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$ . Какие импликации имеются между условиями  
 а)  $\text{rk}(A_1 + A_2) = \text{rk}(A_1) + \text{rk}(A_2)$  б)  $U_1 \cap U_2 = 0$  в)  $W_1 \cap W_2 = 0$ ?
- ГЛ4♦6 (неравенство Фробениуса).** Для любых трёх линейных операторов  $A, B, C : V \rightarrow V$  докажите соотношения  
 а)  $\dim \text{im } A = \dim \text{im}(BA) + \dim(\text{im } A \cap \ker B)$   
 б)  $\dim \text{im}(BA) + \dim \text{im}(AC) \leq \dim \text{im } A + \dim \text{im}(BAC)$
- ГЛ4♦7 (проекторы).** Пусть нетождественный линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  имеет  $F^2 = F$ . Покажите, что  $V = \ker F \oplus \text{im } F$  и  $F$  проектирует  $V$  на  $\text{im } F$  вдоль  $\ker F$ .
- ГЛ4♦8 (инволюции).** Пусть нетождественный линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  имеет  $F^2 = E$ . Покажите, что  $V = V_+ \oplus V_-$ , где  $V_{\pm} = \{v \in V \mid F(v) = \pm v\}$ .
- ГЛ4♦9.** Покажите, что каждая матрица  $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$  удовлетворяет квадратному уравнению вида  $A^2 + \alpha A + \beta E = 0$  с подходящими  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ , и решите в  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$  уравнения  
 а)  $X^3 = 0$  б)  $X^2 = -E$ .
- ГЛ4♦10 (нильпотентные матрицы).** Ненулевая матрица  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$  называется *нильпотентной*, если  $A^n = 0$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Верно ли, что сумма nilьпотентных матриц  $A$  и  $B$  nilьпотентна а) всегда б) если  $[A, B] = 0$  в\*) если  $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$ ?
- ГЛ4♦11.** Верно ли, что каждая квадратная матрица, перестановочная с заданной диагональной матрицей  $A$ , все диагональные элементы которой попарно различны, имеет вид  $f(A)$  для некоторого многочлена  $f(x) \in \mathbb{k}[x]$ ?
- ГЛ4♦12\*.** Пусть  $n \times n$ -матрицы  $A, B, C, D$  обратимы. Явно вычислите  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$  в предположении, что матрицы  $A - BD^{-1}C$ ,  $C - DB^{-1}A$ ,  $B - AC^{-1}D$ ,  $D - CA^{-1}B$  тоже обратимы.
- ГЛ4♦13\*.** Найдите все такие матрицы  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$ , что для всех  $X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$  с  $\text{tr } X = 0$  выполняется равенство  $\text{tr}(AX) = 0$ .

Персональный табель \_\_\_\_\_.  
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (25.10.2021)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9а			
б			
10а			
б			
в			
11			
12			
13			