Многомерие

ГЛЗ⋄1. Сколько k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве над полем из q элементов? Найдите для фиксированных n и k предел этого количества при $q \to 1$.

ГЛЗ⋄2. Сколько k-мерных аффинных подпространств имеется в n-мерном аффинном пространстве над конечным полем из q элементов?

ГЛЗ⋄3. Верно ли, что в каждом векторном пространстве для любых трёх векторных подпространств U, V, W выполняются соотношения:

а) $(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U) = (U+W)\cap V + (U+V)\cap W$

б) $(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U) \subseteq (U\cap V) + (V\cap W) + (W\cap U)$

в) $(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U) \supseteq (U\cap V) + (V\cap W) + (W\cap U)$

г) для конечномерных U, V, W разность размерностей левой и правой частей в предыдущих двух включениях чётна?

ГЛЗ⋄4. Пусть k-мерные подпространства $W_1, \dots, W_m$ таковы, что $\dim W_i \cap W_j = k-1$ при всех $i \neq j$. Покажите, что существует либо $(k-1)$-мерное подпространство $U \subset V$, содержащееся во всех W_i, либо $(k+1)$-мерное подпространство $W \subset V$, содержащее все W_i.

ГЛЗ⋄5. Может ли **а)** векторное **б)** аффинное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа подпространств меньшей размерности?

ГЛЗ⋄6. В четырёхмерном аффинном пространстве над бесконечным полем задано конечное множество двумерных аффинных плоскостей. Всегда ли найдётся двумерная плоскость

а) не пересекающая ни одну из них

б) пересекающая каждую из них ровно в одной точке?

ГЛЗ⋄7. Можно ли через точку, лежащую внутри[1] четырёхмерного куба $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall\, i\ |x_i| \leqslant 1\}$, провести двумерную плоскость так, чтобы она не пересекла ни одного ребра[2] этого куба?

ГЛЗ⋄8. При каких $c \in \mathbb{R}$ четырёхмерный куб из предыдущей задачи пересекается с гиперплоскостью $\sum x_i = c$? Нарисуйте все трёхмерные многогранники, которые высекаются из куба такими гиперплоскостями. Если задача вызывает затруднения, потренируйтесь сначала на аналогичных сечениях трёхмерного куба[3] в $\mathbb{R}^3$.

ГЛЗ⋄9. Векторы $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ имеют нулевую сумму, но некоторые n из них образуют в $\mathbb{R}^n$ базис. Верно ли, что

а) каждый вектор $w \in \mathbb{R}^n$ имеет единственное представление $w = \sum x_i v_i$, в котором $x_i \in \mathbb{R}$ и $\sum x_i = 0$

б) любые n векторов v_i образуют базис в $\mathbb{R}^n$

в) для любого вектора $w \in \mathbb{R}^n$ найдётся составленный из векторов v_i базис, в котором все координаты вектора w неотрицательны?

ГЛЗ⋄10. Может ли поле из четырёх элементов быть подполем поля из **а)** восьми **б*)** шестнадцати элементов?

---

[1] Т. е. имеющую координаты, по модулю строго меньшие единицы.

[2] Т. е. прямой, проходящей чрез какие-нибудь две соседние вершины (две точки, у которых все координаты равны ± 1, причём эти наборы координат отличаются друг от друга ровно в одной позиции).

[3] Алгебраически и те и другие сечения можно описывать в барицентрических координатах относительно треугольника (соотв. тетраэдра) с вершинами в точках пересечения плоскости с тремя (соотв. четырьмя) рёбрами куба, выходящими из вершины $(-1,-1,-1)$ (соотв. $(-1,-1,-1,-1)$) или же относительно центрально симметричного ему треугольника (соотв. тетраэдра), высекаемого рёбрами, входящими в противоположную вершину.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (5.10.2021)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9а			
б			
в			
10а			
б			