§18. Гладкие проективные квадрики

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.

18.1. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики. Напомню, что с каждой квадратичной формой $q \in S^2V^*$ однозначно связаны симметричная билинейная форма[1]

$$\tilde{q} : V \times V \to \Bbbk\,, \quad \tilde{q}(u,w) = \frac{1}{2}\big(q(u+w) - q(u) - q(w)\big)\,,$$

и линейное *отображение корреляции*[2] $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, $w \mapsto \hat{q}(w) : u \mapsto \tilde{q}(u,w)$. Невырожденность формы q равносильна тому, что корреляция является линейным изоморфизмом векторных пространств. Индуцированное ею биективное проективное преобразование $\overline{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n(V^*)$ пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ в пространство $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$ называется *полярным преобразованием* или *поляритетом* относительно гладкой квадрики $Q = V(q) \subset \mathbb{P}_n$. Поляритет сопоставляет каждой точке $p \in \mathbb{P}_n$ её *полярную гиперплоскость*[3] $\overline{q}(p) = \mathbb{P}(p^\perp)$.

Упражнение 18.1. Убедитесь, что при умножении квадратичной формы q на ненулевую константу поляритет не меняется.

Точка p и гиперплоскость $\mathbb{P}(p^\perp)$ называются, соответственно, *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики Q. Геометрически, поляра точки $p \notin Q$ представляет собою гиперплоскость, высекающую видимый из p контур[4] квадрики Q, а полярой точки $p \in Q$ является касательная гиперплоскость T_pQ к квадрике Q в точке p. Таким образом, квадрика однозначно восстанавливается по своему полятирету как ГМТ, лежащих на своих полярах.

18.1.1. Поляритеты над незамкнутыми полями. Мы уже видели, что над алгебраически незамкнутыми полями могут быть анизотропные квадратичные формы, задающие пустые квадрики. Все эти квадрики автоматически невырождены, и их поляритеты являются вполне наблюдаемыми геометрическими преобразованиями точек в гиперплоскости. Пустота квадрики, задающей такое преобразование, означает лишь то, что никакая точка не лежит на своей поляре.

Упражнение 18.2. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой окружности» $x^2 + y^2 = -1$.

Из теор. 17.1 на стр. 222 вытекает, что два поляритета $\overline{q}_1, \overline{q}_2 : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ совпадают тогда и только тогда, когда задающие их квадратичные формы $q_1, q_2 \in S^2(V^*)$ пропорциональны.

Теорема 18.1

Две непустые гладкие квадрики над бесконечным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ совпадают если и только если их уравнения пропорциональны.

Доказательство. При $n = 1$ равенство $V(q_1) = V(q_2) = \{a, b\}$ означает, что обе бинарные квадратичные формы $q_1(x)$, $q_2(x)$ от $x = (x_0, x_1)$ пропорциональны $\det(x,a)\det(x,b)$.

Упражнение 18.3. Покажите, что над бесконечным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ при $n \geqslant 2$ на любой непустой гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$ найдутся $n+2$ точки, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

---

[1] Которая называется *поляризацией* квадратичной формы q, см. n° 14.3 на стр. 187.

[2] См. n° 13.1.2 на стр. 172.

[3] Или *поляру*, см. n° 16.3.1 на стр. 212, особенно — формулу (16-4).

[4] См. n° 16.3.1 на стр. 212.

Так как поляритеты $\overline{q}_1, \overline{q}_2 : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$ одинаково действуют на эти $(n+2)$ точки, корреляции $\hat{q}_1, \hat{q}_2 : V \xrightarrow{\sim} V^*$ пропорциональны по упр. 18.3, а значит, формы q_1 и q_2 имеют пропорциональные матрицы Грама. □

18.1.2. Сопряжение. Поскольку условие $\tilde{q}(a,b) = 0$ симметрично по a и b, точка a лежит на поляре точки b если и только если точка b лежит на поляре точки a. Такие точки a и b называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q. Сопряжённость является симметричным бинарным отношением. Полярные сопряжённым точкам a и b гиперплоскости $\mathbb{P}(a^\perp)$ и $\mathbb{P}(b^\perp)$ тоже называются *сопряжёнными* относительно Q.

Упражнение 18.4. Одной линейкой постройте поляру данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно данной окружности. Особое внимание уделите случаям, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.

Предложение 18.1

Пусть прямая (ab) пересекает гладкую квадрику Q в двух различных точках c и d, отличных от a и b. Точки a, b тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики Q, когда они гармоничны[1] точкам c, d.

Доказательство. Обозначим проходящую через точки a, b, c, d прямую через ℓ. Сопряжение относительно квадрики Q задаёт на прямой ℓ инволюцию $\sigma_Q : \ell \to \ell$, $x \mapsto \ell \cap \mathbb{P}(x^\perp)$, которая переводит точку $x \in \ell$ в точку пересечения её поляры с прямой ℓ. Так точки c и d неподвижны относительно этой инволюции, σ_Q меняет местами точки a и b если и только если $[a,b,c,d] = -1$, как мы видели в упр. 17.9 на стр. 234. □

Упражнение 18.5. Дайте чисто алгебраическое доказательство предл. 18.1.

18.1.3. Двойственная квадрика. Пусть гладкая квадрика $G = V(g) \subset \mathbb{P}_n$ имеет в некотором базисе матрицу Грама Γ. Покажем, что полярное преобразование $\overline{g} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$ относительно G переводит квадрику F, имеющую в том же базисе матрицу Грама Φ, в квадрику $F_G^\times \subset \mathbb{P}_n^\times$ того же ранга, что и F, которая имеет в двойственном базисе матрицу Грама $\Gamma^{-1}\Phi\Gamma^{-1}$. Квадрика $F_G^\times$ состоит из таких ковекторов $\xi = \Gamma x$, что $x^t\Phi x = 0$. Подставляя в это равенство $x = \Gamma^{-1}\xi$ и учитывая, что $\Gamma^t = \Gamma$, получаем $F_G^\times = \{\xi \in \mathbb{P}_n^\times \mid \xi^t\Gamma^{-1}\Phi\Gamma^{-1}\xi = 0\}$.

Применяя это наблюдение к квадрике $F = G$ и полагая $\Phi = \Gamma$, получаем

Предложение 18.2 (двойственная квадрика)

Касательные пространства к гладкой квадрике $G \subset \mathbb{P}_n$ образуют в $\mathbb{P}_n^\times$ гладкую квадрику $G^\times$. Матрицы Грама квадрик G и $G^\times$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$ обратны друг другу. □

Следствие 18.1

Две гиперплоскости $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}_n$ тогда и только тогда сопряжены[2] относительно гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$, когда они гармоничны в порождённом ими пучке гиперплоскостей[3] двум касательным гиперплоскостям к квадрике Q, проходящим через $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

[1] См. n° 17.3.2 на стр. 231.

[2] Напомню, что это означает, что каждая из них содержит полюс другой, см. n° 18.1.2 на стр. 238.

[3] Т. е. в пучке гиперплоскостей, проходящих через $(n-2)$-мерную плоскость $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно к предл. 18.1 на стр. 238. □

Следствие 18.2 (теорема Брианшона)

Шестиугольник $p_1, \dots, p_6$ тогда и только тогда описан вокруг некоторой гладкой коники, когда его главные диагонали (p_1p_4), (p_2p_5), (p_3p_6) пересекаются в одной точке, см. рис. 18◇2 на стр. 239.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно к теореме Паскаля[1]. □

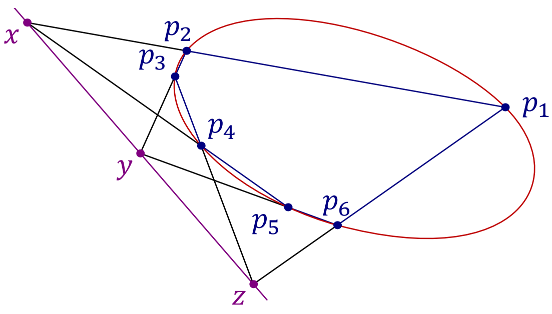

Рис. 18◇1. Вписанный шестиугольник.

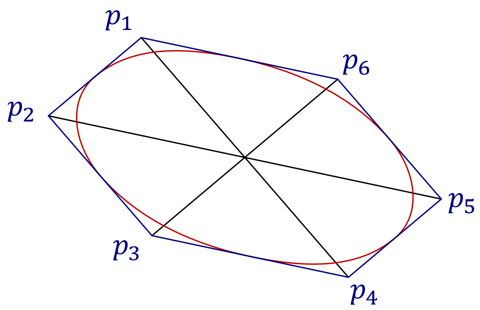

Рис. 18◇2. Описанный шестиугольник.

Пример 18.1 (коника, касающаяся пяти прямых)

Из предл. 16.4 на стр. 220 вытекает, что каждые пять прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, касаются единственной гладкой коники. Эта коника двойственна к гладкой конике, проходящей через пять точек двойственной плоскости, двойственных к заданным пяти прямым.

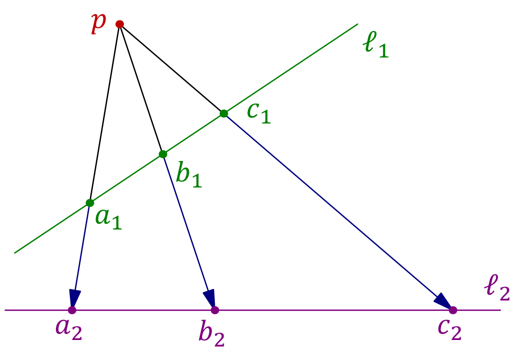

Рис. 18◇3. Перспектива $p : \ell_1 \to \ell_2$.

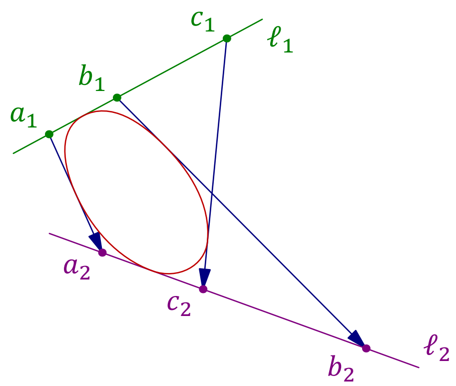

Рис. 18◇4. Гомография $C : \ell_1 \to \ell_2$.

Пример 18.2 (задание гомографии касательными к конике)

Пусть гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя различными прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ переводит три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$, соответственно, в точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. При этом возникают две возможности, показанные на рис. 18◇3 и рис. 18◇4 на стр. 239: либо соединяющие соответственные точки три прямые (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) пересекаются в одной точке p, либо нет. Первое означает, что гомография φ является перспективой[2] с центром в p, и это равносильно равенству $\varphi(q) = q$. Во втором случае никакие три из

[1] См. теор. 17.3 на стр. 228 и прим. 17.7 на стр. 235.

[2] См. прим. 17.1 на стр. 222.

пяти прямых ℓ_1, ℓ_2, (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) не пересекаются в одной точке и, как мы видели в прим. 18.1, существует единственная гладкая коника C, касающаяся всех этих пяти прямых. Преобразование $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, переводящее точку $x \in \ell_1$ в точку пересечения прямой ℓ_2 с отличной от ℓ_1 касательной, опущенной из x на C, является гомографией, ибо оно биективно и рационально. В самом деле, коэффициенты уравнений касательных, опущенных из x на C, суть координаты точек пересечения двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с прямой $x^\times = \mathrm{Ann}(x)$. Одна из этих точек, задающая прямую ℓ_1, известна. Поэтому вторая рационально через неё выражается. Поскольку C и φ одинаково действуют на a_1, b_1, c_1, гомография $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ совпадает φ. Образом и прообразом точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$ в этом случае являются точки пересечения $\ell_2 \cap C$ и $\ell_1 \cap C$ соответственно. Итак, каждая гомография $\ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ либо является перспективой, либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. Обратите внимание, что это описание двойственно предл. 17.2 на стр. 228, и что центр перспективы p и коника C однозначно определяются гомографией $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$.

Предложение 18.3 (теорема о вписанно-описанных треугольниках)
Два треугольника $a_1 b_1 c_1$ и $a_2 b_2 c_2$ вписаны в одну и ту же гладкую конику C' если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники C''.

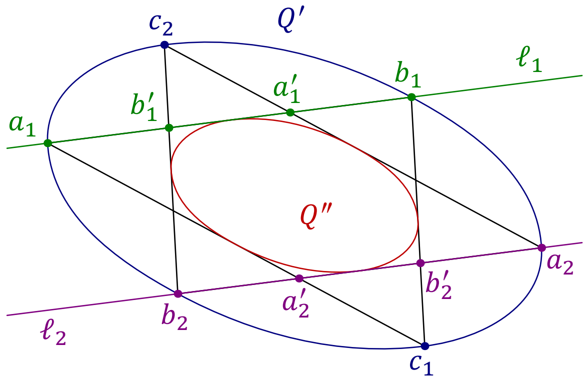

Рис. 18◇5. Вписанно-описанные треугольники.

Доказательство. Пусть точки $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ лежат на конике C', как на рис. 18◇5. Рассмотрим прямые $\ell_1 = (a_1 b_1)$, $\ell_2 = (a_2 b_2)$ и обозначим через $c_2 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C'$ и $c_1 : C' \xrightarrow{\sim} \ell_2$ проекцию прямой ℓ_1 из точки c_2 на конику C' и проекцию коники C' на прямую ℓ_2 из точки c_1. Их композиция $c_1 \circ c_2 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ переводит $a_1 \mapsto a_2'$, $b_1' \mapsto b_2$, $a_1' \mapsto a_2$, $b_1 \mapsto b_2'$ и является неперспективной гомографией, а значит, задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конике C'', вписанной в оба треугольника $a_1 b_1 c_1$ и $a_2 b_2 c_2$. Обратная импликация проективно двойственна доказанной. □

Следствие 18.3 (поризм Понселе для треугольников)
Если пара коник C' и C'' такова, что существует треугольник $a_1 b_1 c_1$, одновременно вписанный в C' и описанный около C'', то аналогичный треугольник $a_2 b_2 c_2$, одновременно вписанный в C' и описанный около C'', можно нарисовать стартовав *с любой* точки $a_2 \in C'$, из которой можно опустить две касательных на конику C''.

Доказательство. В самом деле, проведём из a_2 две касательные $(a_2 b_2)$ и $(a_2 c_2)$ к конике C'' до их пересечения с C' в точках $b_2, c_2 \in C'$, как на рис. 18◇5. По предл. 18.3, треугольники $a_1 b_1 c_1$

и $a_2b_2c_2$ описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых (ab), (bc), (ca), (a_2b_2), (a_2c_2), эта коника и есть C''. □

18.1.4. Гармонически описанная квадрика. Скажем, что набор из $(n+1)$ точек

$$p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_n$$

является *автополярным симплексом* гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$, если полярой каждой из точек p_i является гиперплоскость, порождённая остальными n точками p_ν с $\nu \neq i$. На алгебраическом языке это означает, что векторы p_i образуют ортогональный базис квадратичной формы q, задающей квадрику Q. Квадрика Q' называется *гармонически описанной* около гладкой квадрики Q, если она проходит через вершины какого-нибудь автополярного симплекса квадрики Q.

Теорема 18.2
Пусть основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Квадрика $Q' = V(f)$ с матрицей Грама F гармонически описана около гладкой квадрики $Q = V(g)$, имеющей в том же базисе матрицу Грама G, если и только если $\operatorname{tr}(G^{-1}F) = 0$, и в этом случае каждая точка $p \in Q' \smallsetminus Q$ является вершиной автополярного относительно Q симплекса, вписанного в квадрику Q'.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Матрица $G^{-1}F$ является матрицей такого единственного линейного оператора $\varphi : V \to V$, что $\tilde{f}(u, w) = \tilde{q}(u, \varphi w)$ для всех $u, w \in V$, см. n° 13.2.4 на стр. 177. Поэтому $\operatorname{tr}(G^{-1}F)$ зависит только от квадратичных форм f и g, а не от базиса, в котором пишутся матрицы Грама. В базисе из векторов p_i, образующих вершины автополярного относительно Q симплекса, вписанного в Q', матрица Грама G формы g диагональна с ненулевыми диагональными элементами, а все диагональные элементы матрицы Грама F формы f нулевые. Поэтому все диагональные элементы матрицы $G^{-1}F$ тоже нулевые, и $\operatorname{tr}(G^{-1}F) = 0$.

Покажем индукцией по n, что при выполнении условия $\operatorname{tr}(G^{-1}F) = 0$ выполняется последнее утверждение теоремы. При $n = 1$ выберем в V базис e_0, e_1 с $f(e_0) = 0$ и $\tilde{g}(e_0, e_1) = 0$. Тогда

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

и условие $\operatorname{tr}(G^{-1}F) = 0$ влечёт равенство $c = 0$, откуда $f(x_0, x_1) = 2bx_0x_1$ и $Q' = \{e_0, e_1\}$, как и требуется. При $n \geqslant 2$ рассмотрим точку $e_0 \in Q' \smallsetminus Q$ и обозначим через $H \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ поляру этой точки относительно квадрики Q. Для любого базиса $e_1, \dots, e_n$ в H матрицы Грама форм f и g в базисе $e_0, e_1, \dots, e_n$ имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G_H & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & F_H & \\ * & & & \end{pmatrix},$$

где F_H и G_H суть матрицы Грама квадрик $Q' \cap H$ и $Q \cap H$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. Следовательно, число c и матрица G_H обратимы, квадрика $Q \cap H$ гладкая, а

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G_H^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Поэтому равенство $\operatorname{tr}(G^{-1}F) = 0$ влечёт равенство $\operatorname{tr}(G_H^{-1}F_H) = 0$, и по индукции любая точка $p_1 \in (Q' \cap H) \smallsetminus (Q \cap H)$ является вершиной автополярного относительно $Q \cap H$ симплекса $p_1 \dots p_n$, вписанного в $Q' \cap H$. Симплекс $e_0 p_1 \dots p_n$ автополярен относительно Q и вписан в Q'. □

Пример 18.3 (общие гиперплоскости в пространстве квадрик)
Всякая гиперплоскость в пространстве $\mathbb{P}(S^2V^*)$ квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ задаётся однородным линейным уравнением вида

$$0 = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} AB\,, \tag{18-1}$$

где $A = \left(a_{ij}\right)$ — постоянная симметрическая матрица коэффициентов уравнения гиперплоскости, а $B = \left(b_{ij}\right)$ переменная симметрическая матрица координат в пространстве S^2V^*. Матрицу A можно воспринимать как матрицу Грама некоей фиксированной квадрики $Q_A \subset \mathbb{P}_n$. Если эта квадрика гладкая[1], то уравнение (18-1) задаёт гиперплоскость, состоящую из всех квадрик, гармонически описанных около квадрики $Q_A^\times$ с матрицей Грама A^{-1}.

18.2. Подпространства, лежащие на гладкой квадрике. Ортогональная группа невырожденной квадратичной формы $q \in S^2V^*$ действует на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$, переводя гладкую квадрику $Q = V(q)$ в себя. Согласно сл. 14.2 на стр. 187, это действие позволяет перевести любое проективное подпространство $L \subset Q$ в любое другое подпространство $L' \subset Q$ той же размерности. В частности, ортогональная группа транзитивно действует на точках квадрики и для любых точек $p_1, p_2 \in Q$ биективно отображает множество k-мерных подпространств $L \subset Q$, проходящих через p_1, в аналогичное множество k-мерных подпространств $L' \subset Q$, проходящих через p_2.

18.2.1. Планарность. Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на гладкой квадрике Q, называется *планарностью* квадрики Q. Планарность пустой квадрики, задаваемой анизотропной квадратичной формой, по определению полагается равной -1. Квадрики планарности 0 суть непустые квадрики, не содержащие прямых. Через каждую точку m-планарной квадрики можно провести m-мерное проективное подпространство, целиком лежащее на квадрике, и никакое $(m+1)$-мерное проективное подпространство на такой квадрике не лежит.

Согласно сл. 14.3 на стр. 188, уравнение гладкой квадрики $Q = V(q)$ планарности m записывается в подходящих однородных координатах пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ в виде

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n)\,, \tag{18-2}$$

где α — анизотропная квадратичная форма от $n - 2m - 1$ переменных. Число $2m + 2$ равно размерности гиперболического слагаемого в разложении пространства V в прямую ортогональную относительно формы $\tilde{q}$ сумму гиперболического и анизотропного подпространств, и максимум размерностей изотропных относительно формы $\tilde{q}$ векторных подпространств в V равен $m + 1$. При фиксированном n планарность m может принимать значение в пределах

$$-1 \leqslant m \leqslant (n-1)/2\,.$$

Квадрики (18-2) с разными m не переводятся одна в другую проективными преобразованиями.

[1] Что так в общем случае.

Пример 18.4 (квадрики максимальной планарности)
Максимально возможная планарность квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ равна $(n-1)/2$ при нечётном n и $(n-2)/2$ при чётном n. Над алгебраически замкнутым полем все невырожденные квадрики имеют максимальную планарность. Над любым полем уравнение квадрики максимальной планарности в $\mathbb{P}_n$ в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$0 = x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} \text{ при } n = 2m+1\,, \tag{18-3}$$

$$x_0^2 = x_1x_{m+1} + x_2x_{m+2} + \dots + x_mx_{2m} \text{ при } n = 2m\,. \tag{18-4}$$

Поэтому все квадрики максимальной планарности переводятся друг в друга проективными преобразованиями. Например, все непустые гладкие коники на $\mathbb{P}_2$ проективно конгруэнтны.

Предложение 18.4
Сечение гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ произвольной гиперплоскостью Π либо является гладкой квадрикой в этой гиперплоскости, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$. Последнее равносильно тому, что $\Pi = T_pQ$ касается квадрики в точке p, и в этом случае $Q \cap T_p$ является конусом с вершиной в p над гладкой квадрикой на единицу меньшей планарности и на два меньшей размерности, чем у Q, расположенной в $(n-2)$-мерной плоскости, дополнительной к p внутри T_pQ.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $\Pi = \mathbb{P}(W)$ и $Q = V(q)$. Ядро ограничения оператора корреляции $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$ на подпространство $W \subset V$ является пересечением W с одномерным подпространством $W^\perp \subset V$. Это пересечение либо нулевое, либо является точкой $p \in \Pi$. В первом случае квадрика $Q \cap \Pi$ невырождена, а во втором случае — имеет единственную особую точку p, причём $\Pi = \mathbb{P}(p^\perp)$ является касательным пространством[1] к Q в точке p. Согласно теор. 16.1 на стр. 212, особая квадрика $Q \cap \Pi$ в пространстве $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ является линейным соединением точки p и неособой квадрики, лежащей в любой не проходящей через p гиперплоскости $\mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}_{n-2} \subset \Pi$. Так как ограничение квадратичной формы q на подпространство $U \subset V$ невырождено, имеется ортогональное разложение $V = U \oplus U^\perp$. Ограничение формы q на двумерное пространство $U^\perp$ невырождено, и в $U^\perp$ есть изотропная прямая $p \subset U^\perp$. Следовательно, $U^\perp \simeq H_2$ является гиперболической плоскостью, и размерность гиперболической составляющей ограничения $q|_U$ на два меньше, чем у самой формы q на V, т. е. планарность гладкой квадрики $Q \cap \mathbb{P}(U)$ на единицу меньше, чем у Q. □

18.3. Классификация проективных квадрик. Две квадрики называются *проективно конгруэнтными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства. Поскольку уравнение любой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ над алгебраически замкнутым полем всегда приводится линейной заменой координат к виду

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0\,, \quad \text{где} \quad r = \operatorname{rk} Q = n - \dim \operatorname{Sing} Q\,,$$

мы заключаем, что над алгебраически замкнутым полем две квадрики проективно конгруэнтны тогда и только тогда, когда у них одинаковый ранг.

В теор. 16.1 на стр. 212 мы видели, что над любым полем каждая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ является линейным соединением своего пространства особых точек $\operatorname{Sing} Q$ и неособой квадрики $Q \cap L$ в любом дополнительном к $\operatorname{Sing} Q$ проективном подпространстве $L \subset \mathbb{P}_n$, $L \cap \operatorname{Sing} Q = \varnothing$,

[1] См. формулу (16-5) на стр. 212.

$\dim L = \operatorname{rk} Q - 1$. Так как любая пара дополнительных подпространств переводится в любую другую такую пару проективным автоморфизмом, классификация квадрик над произвольным полем сводится к классификации гладких квадрик.

Гладкие квадрики разной планарности, очевидно, не могут быть проективно конгруэнтны. В прим. 18.4 мы видели, что над произвольным полем все квадрики максимально возможной в $\mathbb{P}_n$ планарности $[(n-1)/2]$ проективно конгруэнтны. Уравнение непустой квадрики немаксимальной планарности m в подходящих координатах приводится к виду (18-2):

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{2m}x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n),$$

где α — ненулевая анизотропная форма, и классификация таких квадрик над произвольным полем $\Bbbk$ требует описания имеющихся над $\Bbbk$ анизотропных квадратичных форм. Для многих полей, например, для поля $\mathbb{Q}$, множество классов анизотропных форм с точностью до изоморфизма представляется на сегодняшний день совершенно необозримым. Но над теми полями, где есть эффективное описание анизотропных форм, можно дать и полную классификацию проективных квадрик.

18.3.1. Вещественные квадрики. Над полем $\mathbb{R}$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ есть единственная с точностью до изометрии и умножения на константу анизотропная форма от k переменных:

$$\alpha(x_1, \dots, x_k) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 .$$

Поэтому каждая гладкая вещественная квадрика размерности n, лежащая в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, в подходящих однородных координатах задаётся уравнением

$$\begin{gathered} x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + x_{2m+3}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 , \\ \text{где } -1 \leqslant m \leqslant n/2 . \end{gathered} \tag{18-5}$$

При разных m эти уравнения задают проективно неконгруэнтные квадрики разной планарности. Поэтому формула (18-5) доставляет полный список парно неконгруэнтных гладких вещественных квадрик. Мы будем обозначать квадрику (18-5) через $Q_{n,m}$ и называть вещественной *m-планарной квадрикой размерности n*. Планарность m, размерность n и абсолютная величина индекса[1] ι квадратичной формы, задающей вещественную квадрику, связаны равенством

$$n = 2m + \iota .$$

В ортогональном базисе уравнение квадрики $Q_{n,m}$ принимает вид

$$t_0^2 + t_1^2 + \cdots + t_m^2 = t_{m+1}^2 + t_{m+2}^2 + \cdots + t_{n+1}^2 .$$

Гиперболические координаты x_ν связаны с ортогональными координатами t_ν формулами

$$\begin{gathered} x_{2i} = t_{m+i} + t_i , \; x_{2i+1} = t_{m+i} - t_i \text{ при } 0 \leqslant i \leqslant m \\ \text{и} \quad x_j = t_j \text{ при } 2m+2 \leqslant j \leqslant n+1 . \end{gathered}$$

Квадрика планарности 0 задаётся в ортогональных координатах уравнением

$$t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2$$

[1] См. n° 14.5 на стр. 191.

и называется *эллиптической*. Она непуста и не содержит прямых. Квадрики положительной планарности традиционно называют *гиперболическими*, не смотря на то, что гиперболической формой задаётся всего одна из них — чётномерная квадрика максимальной планарности $Q_{2k,k}$. Все (-1)-планарные квадрики пусты. Из предл. 18.4 на стр. 243 вытекает

Следствие 18.4
Пересечение гладкой вещественной n-мерной m-планарной квадрики $Q_{n,m}$ с касательной гиперплоскостью в точке p является конусом с вершиной в p над гладкой квадрикой $Q_{n-2,m-1}$ размерности $n-2$ и планарности $m-1$. □

18.4. Квадратичные поверхности. Особая квадратичная поверхность минимального ранга 1 в подходящих координатах задаётся уравнением $x_0^2 = 0$ и называется *двойной плоскостью*.

Особая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_3$ ранга 2 является линейным соединением вершинной прямой $\operatorname{Sing} Q$ и гладкой квадрики на любой дополнительной прямой. Если эта гладкая квадрика пуста, то $Q = \operatorname{Sing} Q$ — это прямая, целиком состоящая из особых точек. Такая квадрика называется *двойной прямой*. Над $\mathbb{R}$ двойная прямая задаётся уравнением $x_0^2 + x_1^2 = 0$, а над алгебраически замкнутыми полями таких квадрик не бывает. Если квадрика Q пересекает дополнительную к $\operatorname{Sing} Q$ прямую по двум точкам, то она является объединением двух различных плоскостей, пересекающихся по прямой $\operatorname{Sing} Q$. Такая квадрика называется *распавшейся*. Уравнение распавшейся квадрики является произведением двух различных линейных форм и в подходящих координатах имеет вид $x_0x_1 = 0$.

Особая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_3$ ранга 3 имеет единственную особую точку $s = \operatorname{Sing} Q$ и является линейным соединением этой точки с гладкой коникой в произвольной не проходящей через s плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}_3$. Если эта коника пуста, квадрика Q состоит из единственной точки s и называется *двойной точкой*. Над $\mathbb{R}$ двойная точка задаётся уравнением $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, над алгебраически замкнутым полем таких квадрик нет. Если гладкая коника $Q \cap \Pi$ непуста, квадрика Q называется *простым конусом* с вершиной в p. Над любым полем уравнение такой квадрики приводится к виду $x_1^2 = x_0x_2$, и её вершина в этих координатах находится в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$.

Упражнение 18.6. Покажите, что каждая лежащая на простом конусе прямая проходит через его вершину.

Гладкая квадратичная поверхность $Q \subset \mathbb{P}_3$ либо пуста, либо 0-планарна, либо 1-планарна. Не содержащая прямых непустая квадрика планарности нуль задаётся уравнением

$$x_0x_1 = \alpha(x_2, x_3)\,,$$

где α — анизотропная квадратичная форма от двух переменных. Классификация таких квадрик требует описания бинарных анизотропных квадратичных форм над полем $\Bbbk$. Над $\mathbb{R}$ такая квадрика ровно одна — это эллиптическая квадрика $Q_{2,0}$, уравнение которой можно записать в виде $x_0x_1 = x_2^2 + x_3^2$ или, если угодно, в виде $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$.

Пример 18.5 (квадратичные поверхности над конечными полями)
Так как над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p > 2$ нет анизотропных квадратичных форм от четырёх переменных[1], каждая гладкая квадратичная поверхность в $\mathbb{P}_3(\mathbb{F}_q)$, не пуста и имеет

[1] См. предл. 14.3 на стр. 190.

планарность 0 или 1. В подходящем базисе матрица Грама квадратичной формы, задающей 1-планарную или 0-планарную квадрику, имеет, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix},$$

где форма от двух переменных с матрицей Грама $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ анизотропна, т. е.

$$D/4 = b^2 - ac = -\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

не квадрат в $\mathbb{F}_q$. Поскольку определитель Грама всей четырёхмерной формы в этом случае тоже равен $b^2 - ac$, а четырёхмерная гиперболическая форма имеет определитель 1, мы заключаем, что гладкая квадрика в $\mathbb{P}_3(\mathbb{F}_q)$ нуль-планарна если и только если её определитель Грама не является квадратом. Так как двумерная анизотропная форма над $\mathbb{F}_q$ единственна с точностью до изометрии[1], все 0-планарные квадратичные поверхности над $\mathbb{F}_q$ проективно конгруэнтны.

Упражнение 18.7. Покажите, что гладкая 0-планарная квадрика в $\mathbb{P}_3(\mathbb{F}_q)$ состоит из $q^2 + 1$ точек, а 1-планарная — из $(q+1)^2$ точек.

18.4.1. Гладкая квадратичная поверхность планарности один. Над любым полем все гладкие квадратичные поверхности планарности 1 проективно конгруэнтны. Удобной геометрической моделью такой поверхности является *квадрика Сегре* в проективном пространстве

$$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)\right),$$

задаваемая квадратным уравнением $\det(A) = 0$ и состоящая из матриц ранга 1:

$$Q_S \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{18-6}$$

Каждый оператор $F : U \to U$ ранга 1 на двумерном векторном пространстве U имеет одномерный образ, который является точкой на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, и одномерное ядро, аннулятор которого является точкой на $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$. Наоборот, любые ненулевые вектор $v \in U$ и ковектор $\xi \in U^*$ задают на U линейный оператор ранга 1

$$v \otimes \xi : U \to U, \quad u \mapsto v \cdot \xi(u), \tag{18-7}$$

образ которого порождается вектором v, а аннулятор ядра — ковектором ξ. Оператор (18-7) называется *тензорным произведением* вектора v и ковектора ξ. При умножении v и ξ на ненулевые константы, оператор $v \otimes \xi$ умножается на произведение этих констант. Мы получаем биекцию между точками квадрики Сегре и точками $(v, \xi) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$. Вложение

$$s : \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}\Big(\mathrm{End}\,(U)\Big), \quad (v, \xi) \mapsto v \otimes \xi, \tag{18-8}$$

[1] См. предл. 14.4 на стр. 190.

образом которого является квадрика Сегре, называется *вложением Сегре*.

Упражнение 18.8. Покажите, что касательное пространство к квадрике Сегре в точке $v \otimes \xi$ состоит из таких линейных операторов $f : U \to U$, что $f(\mathrm{Ann}\,\xi) \subset \Bbbk \cdot v$.

Для координатного пространства $U = \Bbbk^2$, вектора $x \in \Bbbk^2$ с координатами $(x_0 : x_1)$ и ковектора $\xi \in \Bbbk^{2*}$ с координатам $(\xi_0 : \xi_1)$ в двойственном базисе оператор $x \otimes \xi$ имеет в стандартном базисе пространства $\Bbbk^2$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} . \tag{18-9}$$

Точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$ и $(\xi_0 : \xi_1) \in \mathbb{P}_1^\times$ восстанавливаются по заданной матрице ранга 1 как отношение между её строками и отношение между её столбцами соответственно, и для любых двух заданных таких отношений матрица (18-9) является единственной с точностью до пропорциональности матрицей, в которой эти отношения реализуются.

Упражнение 18.9. Обязательно убедитесь во всём этом этом!

Матрицы с предписанным отношением строк $x = (x_0 : x_1)$ составляют двумерное векторное подпространство в $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)$. Его проективизация является образом «вертикальной» координатной прямой $x \times \mathbb{P}_1^\times \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ при вложении (18-8) и представляет собою лежащую на квадрике Сегре прямую в $\mathbb{P}_3$. Аналогично, каждая «горизонтальная» координатная прямая $\mathbb{P}_1 \times \xi \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ переводится вложением (18-8) в лежащую на квадрике Сегре прямую, образованную классами пропорциональных матриц ранга 1 с фиксированным отношением столбцов $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$. Поскольку отображение (18-8) является биекцией между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ и квадрикой Сегре, мы приходим к следующему заключению.

Предложение 18.5

Квадратичная поверхность планарности 1 в $\mathbb{P}_3$ над произвольным полем $\Bbbk$ заметается двумя семействами прямых так, что любые две прямые из одного семейства не пересекаются, любые две прямые из разных семейств пересекаются, каждая точка квадрики является точкой пересечения двух прямых из разных семейств, и каждая лежащая на квадрике прямая принадлежит ровно одному из семейств.

Доказательство. Проверки требует лишь последнее утверждение, означающее, что на квадрике Сегре не лежит никаких других прямых кроме образов координатных прямых произведения $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ при отображении (18-8). Лежащая на квадрике Q_S прямая ℓ содержится в пересечении этой квадрики с касательной плоскостью $T_p Q_S$, построенной в любой точке $p \in \ell$. Пересечение $Q_S \cap T_p Q_S$ является коникой в плоскости $T_p Q_S$ и содержит пару проходящих через p прямых из разных семейств. Тем самым, это распавшаяся коника, состоящая ровно из этих дух прямых, и прямая ℓ — одна из них. □

Упражнение 18.10. Покажите, что гомография $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$, задаваемая не лежащей на квадрике Q_S точкой $\varphi \in \mathbb{P}\big(\mathrm{End}(U)\big)$, переводит точку $p \in \mathbb{P}(U)$ в такую точку $q \in \mathbb{P}(U)$, что плоскость, порождённая точкой φ и прямолинейной образующей $\mathbb{P}_1 \times p^\times \subset Q_S$, пересекает квадрику Q_S по этой образующей и образующей $q \times \mathbb{P}_1^\times$.

Предложение 18.6

Любые три прямые $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике. Если прямые попарно не пересекаются, то проходящая через них квадрика единственна, невырождена, 1-планарна и является объединением всех прямых, пересекающих каждую из прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.

Доказательство. Квадрики в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Так как любые 9 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_9$ пересекаются, через любые 9 точек в $\mathbb{P}_3$ можно провести квадрику. Выбирая на каждой из прямых по 3 различные точки и проводя через эти точки квадрику, заключаем, что она целиком содержит все три прямые, а также любую прямую пересекающую каждую из прямых ℓ_i в трёх разных своих точках. Поскольку ни на какой особой квадрике нет трёх попарно непересекающихся прямых, построенная квадрика гладкая и 1-планарная, если $\ell_i \cap \ell_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. В этом случае все три прямые ℓ_i лежат в одном семействе прямолинейных образующих, и каждая прямая из второго семейства образующих пересекает каждую из прямых ℓ_i. □

Упражнение 18.11. Сколько прямых в $\mathbb{P}_3$ пересекает каждую из четырёх заданных прямых? Перечислите все возможные над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ ответы. Какие из них устойчивы к малым шевелениям заданных прямых?

18.5. Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$ и прямые в $\mathbb{P}_3$. Множество всех k-мерных векторных подпространств в фиксированном n-мерном векторном пространстве называется *грассманианом* и обозначается $\mathrm{Gr}(k,n)$. Например, проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1,n+1)$, а двойственное ему пространство гиперплоскостей $\mathbb{P}_n^\times = \mathrm{Gr}(n,n+1)$. Простейшим отличным от проективного пространства грассманианом является $\mathrm{Gr}(2,4)$. Его точки суть двумерные векторные подпространства в векторном пространстве $V \simeq \Bbbk^4$ или, что то же самое, проективные прямые в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. $\mathrm{Gr}(2,4)$ вкладывается в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ *отображением Плюккера*

$$p : \mathrm{Gr}(2,4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V)\,, \quad U \mapsto \Lambda^2U\,, \tag{18-10}$$

которое переводит прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_3$, являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства $U \subset V$ с базисом a, b, в одномерное подпространство $\Lambda^2U \subset \Lambda^2V$, порождённое грассмановым произведением $a \wedge b$.

Упражнение 18.12. Убедитесь, что отображение (18-10) инъективно.

Согласно сл. 15.2 на стр. 199, разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega \in \Lambda^2V$ на два линейных множителя равносильна тому, что $\omega \wedge \omega = 0$. Это соотношение задаёт в пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ *квадрику Плюккера*

$$P = V(q) = \{\omega \in \Lambda^2V \mid \omega \wedge \omega = 0\}\,, \tag{18-11}$$

которая является множеством изотропных векторов билинейной формы $\tilde{q} : \Lambda^2V \times \Lambda^2V \to \Bbbk$, однозначно с точностью до пропорциональности определяемой тем, что для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2V$ в одномерном векторном пространстве Λ^4V выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\,, \tag{18-12}$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V. Поскольку однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом, эта билинейная форма симметрична.

Упражнение 18.13. Убедитесь, что задаваемая равенством (18-12) форма $\tilde{q}$ билинейна и невырождена, а при выборе другого базиса в V она умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из шести мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

В координатах x_{ij} относительно стандартного базиса из мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ для бивектора $\omega = \sum_{ij} x_{ij}e_{ij}$ принимает вид

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0\,, \tag{18-13}$$

а отображение (18-10) переводит прямую (ab), порождённую векторами a, b, строки координат которых в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 составляют 2×4 матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

в грассманову квадратичную форму $a \wedge b$ с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$, равными 2×2 минорам этой матрицы.

Упражнение 18.14. Убедитесь в этом и выясните, существует ли комплексная 2×4-матрица, шесть 2×2-миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

Поскольку квадратичная форма (18-13) гиперболическая, квадрика (18-11) 2-планарна. Таким образом, любая 2-планарная квадрика в $\mathbb{P}_5$ над любым полем отличной от 2 характеристики может восприниматься как множество прямых в подходящем пространстве $\mathbb{P}_3$.

Лемма 18.1
Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаютсяесли и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (18-12).

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4, что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a, то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. □

Следствие 18.5
Для любой точки $p = p(\ell) \in P$ пересечение $P \cap T_p P = \{p(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \varnothing\}$.

18.5.1. Связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$. Множество прямых в $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $p_i = p(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом

$$\pi = T_{p_1} P \cap T_{p_2} P \cap T_{p_3} P \subset P .$$

По лем. 18.1 и сл. 18.5 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в $\mathbb{P}_3$. Три прямые в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

α-плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$, состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$

β-плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$, состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$.

Мы заключаем, что плюккерова квадрика заметается двумя семействами плоскостей разного типа так, что любые две плоскости одного типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\begin{gathered} \pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = p\left(\Pi_1 \cap \Pi_2\right) \\ \pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) = p\big((O_1 O_2)\big), \end{gathered}$$

а две плоскости $\pi_\beta(\Pi), \pi_\alpha(O)$ разных типов не пересекаются при $O \notin \Pi$, а при $O \in \Pi$ пересекаются по прямой, которая является плюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $O \in \Pi$. Покажем, что все прямые, лежащие на квадрике Плюккера, имеют такой вид. Для этого рассмотрим конус $C = P \cap T_p P$ с вершиной p, образованный всеми лежащими на квадрике P прямыми, проходящими через точку p, и зафиксируем какое-нибудь не содержащее p трёхмерное проективное подпространство $H \subset T_p P$, см. рис. 18◇6. Пересечение $G = C \cap H$ является гладкой 1-планарной квадрикой в H, и любая проходящая через p прямая на P имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$ для некоторой точки $p' \in G$ и плоскостей π_α, π_β натянутых на точку p и пару проходящих через p' прямолинейных образующих квадрики G.

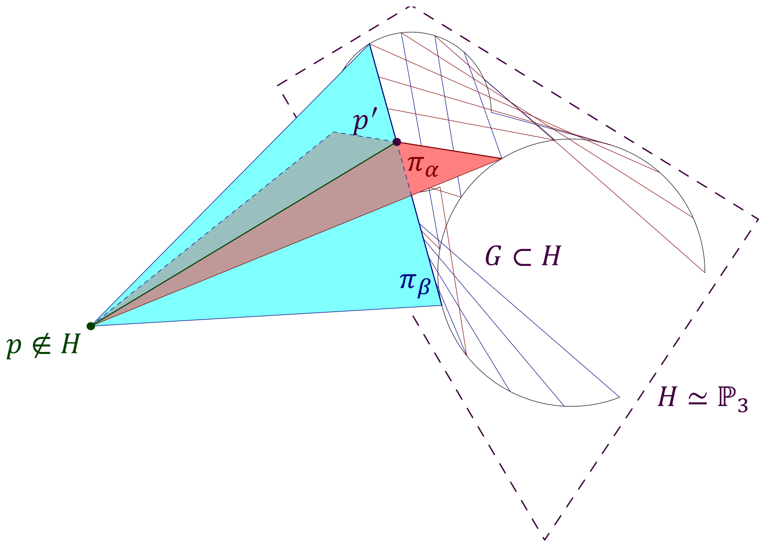

Рис. 18◇6. Конус $C = P \cap T_p P$.

Упр. 18.3. Возьмём произвольную точку $p_0 \in Q$ и любую не проходящую через p_0 гиперплоскость $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$, пересекающую Q по гладкой квадрике $Q' = \Pi \cap Q$ (убедитесь, что при $n \geqslant 2$ это возможно[1]). Выберем на Q' линейно независимые точки $p_1, \dots, p_n$ и проведём через p_0 прямую, пересекающую гиперплоскость Π вне квадрики Q' и $n+1$ плоскостей размерности $n-2$, высекаемых из Π касательной гиперплоскостью $T_{p_0}Q$ и n гиперплоскостями, натянутыми на точку p_0 и все точки p_i, без какой-нибудь одной[2]. Эта прямая пересечёт квадрику Q в точке p_{n+1}, которая не лежит в одной гиперплоскости ни с какими n из точек $p_0, \dots, p_n$.

Упр. 18.4. Построим поляры[3] каких нибудь двух точек a, b, лежащих на данной прямой ℓ вне очерчиваемого окружностью круга. Точка их пересечения будет полюсом прямой (ab). Поляра лежащей внутри круга точки — это прямая, проходящая через полюса произвольной пары прямых, пересекающихся в этой точке.

Упр. 18.5. Пересечение квадрики Q с прямой (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$, поляризация которой

$$\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d)\right).$$

Условие сопряжённости $\tilde{q}(a, b) = 0$ означает, что $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$, т. е. $[a, b, c, d] = -1$.

Упр. 18.6. Если прямая $\ell \subset Q$ не проходит через s, то порождённая прямой ℓ и точкой s плоскость целиком лежит на квадрике Q и пересекает плоскость Π по прямой, что невозможно, так как гладкая коника $Q \cap \Pi$ не содержит прямых.

Упр. 18.7. Проектируя 0-планарную квадрику Q из точки $p \in Q$ на плоскость $H \not\ni p$, получаем биекцию между дополнением $Q \smallsetminus p$ и аффинной плоскостью $H \smallsetminus T_pQ$, дополнительной к проективной прямой, высекаемой из H касательным пространством к Q в точке p. Квадратичная поверхность планарности 1 — это квадрика Веронезе из n° 18.4.1 на стр. 246, и её точки биективно соответствуют точкам $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

Упр. 18.8. Базисом пространства $T_{v\otimes\xi}$ являются операторы $v \otimes \xi$, $u \otimes \xi$ и $v \otimes \eta$, где $u \in U$ и $\eta \in U^*$ суть любые вектор и ковектор, не пропорциональные v и ξ соответственно. Применение любого из этих операторов к вектору $w \in \operatorname{Ann}\xi$ даёт либо 0, либо вектор, пропорциональный v. Поскольку операторы $F : U \to U$ со свойством $F(\operatorname{Ann}\xi) \subset \Bbbk \cdot v$ тоже составляют трёхмерное векторное пространство, последнее совпадает с $T_{v\otimes\xi}$.

Упр. 18.11. Над $\mathbb{C}$ устойчивый ответ — две, над $\mathbb{R}$ — две или ни одной. При специальном расположении четырёх заданных прямых их могут пересекать ровно одна или бесконечно много прямых. Рассмотрите множество всех прямых, пересекающих первые три данные прямые, и выясните, как эта квадрика взаимодействует с четвёртой данной прямой.

[1] См. предл. 18.4 на стр. 243.

[2] Это можно сделать, поскольку произведение квадратичной формы, задающей квадрику Q', и $n+1$ линейных форм, задающих гиперплоскости, является ненулевым многочленом от однородных координат в гиперплоскости Π и над бесконечным полем не может тождественно обращаться в нуль во всех точках этой гиперплоскости.

[3] См. рис. 17◇13 на стр. 234.