

§14. Симметричные билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле \mathbb{k} имеет $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$.

14.1. Пространства со скалярным произведением. Будем называть *пространством со скалярным произведением* конечномерное векторное пространство V над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ с зафиксированной на нём невырожденной¹ симметричной билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$. В этом и следующем разделах буква V по умолчанию обозначает именно такое пространство.

14.1.1. Ортогональные прямые суммы. Из двух пространств V_1, V_2 со скалярными произведениями β_1, β_2 можно изготовить пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dot{+} \beta_2$, относительно которого слагаемые ортогональны друг другу и которое ограничивается на V_1 и V_2 в β_1 и β_2 . Это скалярное произведение задаётся формулой

$$[\beta_1 \dot{+} \beta_2]((u_1, u_2), (w_1, w_2)) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1(u_1, u_2) + \beta_2(w_1, w_2).$$

Его матрица Грама в любом базисе, первые $\dim V_1$ векторов которого образуют базис в V_1 с матрицей Грама B_1 , а последние $\dim V_2$ векторов — базис в V_2 с матрицей Грама B_2 , имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dot{+} \beta_2$ обозначается $V_1 \dot{+} V_2$ и называется *ортогональной прямой суммой* пространств V_1 и V_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Обозначим через H_{2n} гиперболическое пространство² размерности $2n$. Постройте изометрический изоморфизм³ $H_{2m} \dot{+} H_{2k} \simeq H_{2(m+k)}$.

14.1.2. Изотропные и анизотропные подпространства. Вектор $v \in V$ называется *изотропным*, если $\beta(v, v) = 0$. Подпространство $U \subset V$, целиком состоящее из изотропных векторов, изотропно в смысле п° 13.2.2 на стр. 174, т. е. $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$, поскольку

$$2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0.$$

Подпространство $U \subset V$ называется *анизотропным*, если в нём нет ненулевых изотропных векторов. Если анизотропно всё пространство V , то говорят, что скалярное произведение на V *анизотропно*. Например, евклидово скалярное произведение на вещественном векторном пространстве анизотропно. Так как анизотропная форма обладает свойствами (5,6) из предл. 13.1 на стр. 172, каждая анизотропная форма невырождена. Поэтому для любого анизотропного подпространства $U \subset V$ имеет место ортогональное разложение $V = U \oplus U^\perp$ из предл. 13.4 на стр. 178.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.1

Каждое изотропное подпространство U в пространстве V со скалярным произведением β содержится в некотором гиперболическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2 \dim U$. При этом любой базис подпространства U дополняется до гиперболического базиса пространства W .

¹См. предл. 13.1 на стр. 172.

²См. прим. 13.2 на стр. 173.

³См. п° 13.1.4 на стр. 172.

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис u_1, \dots, u_m в U , дополним его до базиса в V и обозначим через $u_1^\vee, \dots, u_m^\vee$ первые m векторов ортогонально двойственного базиса. Тогда

$$\beta(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (14-1)$$

и эти соотношения ортогональности не нарушаются при добавлении к любому из векторов u_j^\vee произвольной линейной комбинации векторов u_i . Заменяем каждый из векторов u_j^\vee на вектор

$$w_j = u_j^\vee - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m \beta(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v.$$

Векторы w_1, \dots, w_m по-прежнему удовлетворяют соотношениям (14-1) и вдобавок

$$\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2} \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2} \beta(u_j^\vee, u_i^\vee) = 0,$$

т. е. $2m$ векторов $u_i, w_j, 1 \leq i, j \leq m$, образуют гиперболический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве W . \square

ТЕОРЕМА 14.1

Каждое пространство V со скалярным произведением распадается в прямую ортогональную сумму $V \simeq H_{2k} \dot{+} A$, первое слагаемое которой гиперболическое и может быть нулевым или совпадать со всем пространством V , а второе слагаемое $A = H_{2k}^\perp$ анизотропно.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если V анизотропно (что так при $\dim V = 1$), доказывать нечего. Если существует ненулевой изотропный вектор $e \in V$, то по [предл. 14.1](#) он лежит в некоторой гиперболической плоскости $H_2 \subset V$, и $V = H_2 \oplus H_2^\perp$ согласно [предл. 13.4](#). По индукции, $H_2^\perp = H_{2m} \oplus A$, где $A = H_{2m}^\perp$ анизотропно. Поэтому $V = H_{2m+2} \oplus A$ и $A = H_{2m+2}^\perp$. \square

Замечание 14.1. Ниже, в [теор. 14.4](#) на стр. 186, мы увидим, что разложение из [теор. 14.1](#) единственно в следующем смысле: если $V \simeq H_{2k} \dot{+} U \simeq H_{2m} \dot{+} W$, где U и W анизотропны, то $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

СЛЕДСТВИЕ 14.1

Следующие свойства пространства V со скалярным произведением эквивалентны:

- 1) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству
- 2) V является прямой суммой двух изотропных подпространств
- 3) $\dim V$ чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2) очевидна. Пусть выполнено (2). По [предл. 13.2](#) размерность каждого из из двух изотропных прямых слагаемых не превышает половины размерности V , что возможно только если обе эти размерности равны $\frac{1}{2} \dim V$. Тем самым, (2) \Rightarrow (3). По [предл. 14.1](#) на стр. 182 каждое изотропное подпространство размерности $\frac{1}{2} \dim V$ содержится в гиперболическом подпространстве размерности $\dim V$, которое таким образом совпадает со всем пространством V , что даёт импликацию (3) \Rightarrow (1). \square

14.2. Изометрии и отражения. Всякий анизотропный вектор $e \in V$ задаёт разложение пространства V в прямую ортогональную сумму $V = \mathbb{k} \cdot e \oplus e^\perp$. Линейный оператор $\sigma_e : V \rightarrow V$, тождественно действующий на гиперплоскости e^\perp и переводящий вектор e в $-e$, называется *отражением* в гиперплоскости e^\perp , см. рис. 14♦1. Произвольный вектор $v = v_e + v_{e^\perp} \in V$, где $v_e = e \beta(e, v) / \beta(e, e)$ — проекция вектора v на одномерное подпространство $\mathbb{k} \cdot e$ вдоль гиперплоскости e^\perp , а $v_{e^\perp} = v - v_e \in e^\perp$, переходит при этом в вектор

$$\sigma_e(v) = -v_e + v_{e^\perp} = v - 2v_e = v - 2 \frac{\beta(e, v)}{\beta(e, e)} \cdot e. \quad (14.2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что $\sigma_e \in O_\beta(V)$ и $\sigma_e^2 = \text{Id}_V$, и докажите для любых изометрии $f \in O(V)$ и анизотропного вектора $e \in V$ равенство $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$.

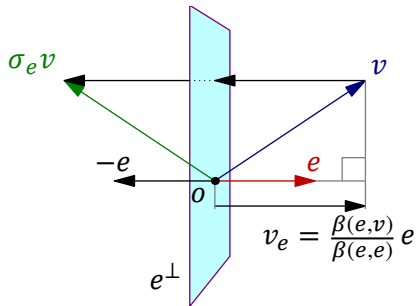


Рис. 14♦1. Отражение σ_e .

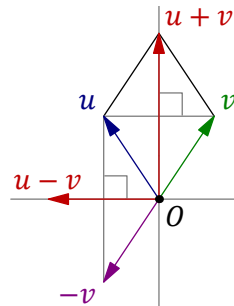


Рис. 14♦2. Отражения в ромбе.

ЛЕММА 14.1

В любом пространстве V со скалярным произведением β для каждой пары различных анизотропных векторов u, v с равными скалярными квадратами $\beta(u, u) = \beta(v, v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v , либо в $-v$.

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v не коллинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей $u + v, u - v$ натянутого на них ромба (см. рис. 14♦2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны:

$$\beta(u + v, u - v) = \beta(u, u) - \beta(v, v) = 0,$$

и их линейная оболочка содержит анизотропные векторы u, v . Тем самым, хотя бы одно из отражений $\sigma_{u-v}, \sigma_{u+v}$ определено. При этом $\sigma_{u-v}(u) = v$, а $\sigma_{u+v}(u) = -v$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Проверьте, последние два равенства.

ТЕОРЕМА 14.2

Всякая изометрия n -мерного пространства со скалярным произведением является композицией не более чем $2n - 1$ отражений.

¹Мы пользуемся тем, что $e^\vee = e / \beta(e, e)$ является двойственным к e относительно формы β базисным вектором одномерного пространства $\mathbb{k}e$ и по форм. (13-18) на стр. 178 ортогональная проекция произвольного вектора v на это подпространство равна $v_e = \beta(e, v) e^\vee$.

Доказательство. Индукция по n . Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Пусть $n > 1$ и $f : V \rightarrow V$ — изометрия. Выберем в V какой-нибудь анизотропный вектор v и обозначим через σ отражение, переводящее $f(v)$ в v или в $-v$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n - 1)$ -мерную гиперплоскость v^\perp . По индукции, действие σf на v^\perp является композицией не более $2n - 3$ отражений в гиперплоскостях внутри v^\perp . Продолжим их до отражений всего пространства V , добавив в зеркало каждого отражения вектор v . Композиция полученных отражений совпадает с σf на гиперплоскости v^\perp , а её действие на v либо такое же, как у σf (при $\sigma f(v) = v$), либо отличается от него знаком (при $\sigma f(v) = -v$). Поэтому σf , как оператор на всём пространстве V , есть композиция построенных $2n - 3$ отражений и, возможно, ещё одного отражения в гиперплоскости v^\perp . Следовательно, $f = \sigma \sigma f$ это композиция не более $2n - 1$ отражений. \square

УПРАЖНЕНИЕ 14.4. Покажите, что в анизотропном пространстве V в условиях лем. 14.1 всегда найдётся отражение, переводящее u в точности в v , и выведите отсюда, что любая изометрия n -мерного анизотропного пространства является композицией не более n отражений.

ТЕОРЕМА 14.3 (ЛЕММА ВИТТА)

Пусть четыре пространства U_1, W_1, U_2, W_2 со скалярными произведениями таковы, что некоторые два из трёх пространств $U_1, U_1 \dot{+} W_1, W_1$ изометрически изоморфны соответствующей паре пространств из тройки $U_2, U_2 \dot{+} W_2, W_2$. Тогда оставшиеся третьи элементы троек тоже изометрически изоморфны.

Доказательство. Если есть изометрические изоморфизмы $f : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$ и $g : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$, то их прямая сумма $f \oplus g : U_1 \dot{+} W_1 \rightarrow U_2 \dot{+} W_2, (u, w) \mapsto (f(u), g(w))$, является требуемым изометрическим изоморфизмом. Оставшиеся два случая симметричны, и мы разберём один из них. Пусть имеются изометрические изоморфизмы

$$f : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \quad \text{и} \quad h : U_1 \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \dot{+} W_2.$$

Изометрический изоморфизм $g : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$ строится индукцией по $\dim U_1 = \dim U_2$. Если пространство U_1 одномерно с базисом u , то вектор u анизотропен. Поэтому векторы $f(u)$ и $h(u, 0)$ тоже анизотропны и имеют одинаковые скалярные квадраты. Обозначим через σ отражение пространства $U_2 \dot{+} W_2$, переводящее $h(u, 0)$ в $(\pm f(u), 0)$. Композиция

$$\sigma h : U_1 \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \dot{+} W_2$$

изометрично отображает одномерное подпространство U_1 первой суммы на одномерное подпространство U_2 второй, а значит, изометрично отображает ортогональное дополнение к U_1 в первой сумме на ортогональное дополнение к U_2 во второй, что и даёт требуемый изоморфизм $\sigma h|_{W_1} : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$. Пусть теперь $\dim U_1 > 1$. Выберем в U_1 любой анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональные разложения

$$U_1 \dot{+} W_1 = \mathbb{k} \cdot u \dot{+} u^\perp \dot{+} W_1 \quad \text{и} \quad U_2 \dot{+} W_2 = \mathbb{k} \cdot f(u) \dot{+} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

в которых $u^\perp \subset U_1$ и $f(u)^\perp \subset U_2$ означают ортогональные дополнения к анизотропным векторам u и $f(u)$ внутри U_1 и U_2 соответственно. Так как пространства $\mathbb{k} \cdot u$ и $\mathbb{k} \cdot f(u)$ изометрически изоморфны, по уже доказанному существуют изометрии

$$f' : u^\perp \xrightarrow{\cong} f(u)^\perp \quad \text{и} \quad h' : u^\perp \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

к которым применимо индуктивное предположение. \square

ТЕОРЕМА 14.4

Построенное в теор. 14.1 разложение пространства V со скалярным произведением в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений $V = H_{2k} \dot{+} U = H_{2m} \dot{+} W$ имеет место равенство $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

Доказательство. Пусть $m \geq k$, так что $H_{2m} = H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)}$. Тожественное отображение $\text{Id} : V \rightarrow V$ задаёт изометрический изоморфизм $H_{2k} \dot{+} U \simeq H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)} \dot{+} W$. По лемме Витта существует изометрический изоморфизм $U \simeq H_{2(m-k)} \dot{+} W$. Так как U анизотропно, $H_{2(m-k)} = 0$ (иначе в U будет ненулевой изотропный вектор), откуда $k = m$ и $U \simeq W$. \square

ТЕОРЕМА 14.5

Если скалярное произведение на пространстве V невырожденно ограничивается на подпространства $U, W \subset V$ и существует изометрический изоморфизм $\varphi : U \simeq W$, то он продолжается (неоднозначно) до такого изометрического автоморфизма $f : V \simeq V$, что $f|_U = \varphi$.

Доказательство. Если есть хоть какой-нибудь изометрический изоморфизм $\psi : U^\perp \simeq W^\perp$, то изометрия $f = \varphi \oplus \psi : U \oplus U^\perp \simeq W \oplus W^\perp$, $(u, u') \mapsto (\varphi(u'), \psi(u'))$ является требуемым автоморфизмом пространства V . Поскольку тождественный автоморфизм пространства V является изометрией между $U \dot{+} U^\perp \simeq V$ и $W \dot{+} W^\perp \simeq V$, и по условию существует изометрия $U \simeq W$, из леммы Витта тоже изометрический изоморфизм. Так что по лемме Витта¹ ортогоналы U^\perp и W^\perp изометрически изоморфны. \square

Следствие 14.2

Для каждого натурального числа k в диапазоне $1 \leq k \leq \dim V / 2$ группа изометрий $O(V)$ транзитивно действует на k -мерных изотропных и $2k$ -мерных гиперболических подпространствах в V .

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает непосредственно из теор. 14.5, а про изотропные — получается из него применением предл. 14.1. \square

14.3. Квадратичные формы. Функция $q : V \rightarrow \mathbb{k}$ на n -мерном векторном пространстве V над полем \mathbb{k} называется *квадратичной формой*, если она является однородным многочленом степени 2 от координат, т. е. существуют такие базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в V и однородный многочлен второй степени $q_e \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, что $q(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = q_e(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ для всех $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$. Если $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$, то многочлен q_e можно записать в виде

$$q_e(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j, \quad (14.3)$$

где суммирование происходит по всем парам индексов $1 \leq i, j \leq n$, а коэффициенты q_{ij} симметричны по i и j , т. е. при $i \neq j$ число $q_{ji} = q_{ij}$ равно половине² фактического коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене q_e , получающегося после приведения подобных слагаемых в (14.3). Если организовать числа q_{ij} в симметричную матрицу $Q_e = (q_{ij})$, которую мы будем называть

¹См. теор. 14.3 на стр. 185.

²Обратите внимание, что над полем характеристики 2 многочлен $x_1 x_2$ не записывается в виде (14.3).

матрицей Грама многочлена q_e , и обозначить через x и $x^t = (x_1, \dots, x_n)$ столбец и строку, составленные из переменных, то (14-3) можно переписать в виде

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i q_{ij} x_j = x^t Q_e x. \quad (14-4)$$

Сравнивая это с форм. (13-3) на стр. 170, мы заключаем, что $q(v) = \tilde{q}(v, v)$, где $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ — симметричная билинейная форма с матрицей Грама Q_e в базисе e . Поскольку

$$q(u+w) - q(u) - q(w) = \tilde{q}(u+w, u+w) - \tilde{q}(u, u) - \tilde{q}(w, w) = 2\tilde{q}(u, w),$$

симметричная билинейная форма \tilde{q} со свойством $\tilde{q}(v, v) = q(v)$ однозначно определяется квадратичной формой q , если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Симметричная билинейная форма \tilde{q} называется *поляризацией* квадратичной формы q . Обратите внимание, что взаимно однозначное соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами

$$\begin{aligned} \tilde{q}(u, w) &\mapsto q(v) = \tilde{q}(v, v) \\ q(v) &\mapsto \tilde{q}(u, w) = \frac{1}{2}(q(u+w) - q(u) - q(w)) \end{aligned} \quad (14-5)$$

не зависят от базиса e в V . В частности, для любого базиса $f = e C_{ef}$ в V значение $q(v)$ является однородным многочленом второй степени q_f от координат вектора v в базисе f , причём матрица Грама этого многочлена, равная матрице Грама билинейной формы \tilde{q} в базисе f , будет равна¹ $Q_f = C_{ef}^t Q_e C_{ef}$.

Поскольку при переходе от базиса к базису определитель Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода, класс числа $\det Q_e \in \mathbb{k}$ по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля \mathbb{k} не зависит от выбора базиса e . Мы будем обозначать этот класс $\det q \in \mathbb{k}/\mathbb{k}^{*2}$ и называть его *определителем Грама* квадратичной формы q . Квадратичная форма q называется *вырожденной*, если $\det q = 0$. Формы с $\det q \neq 0$ называются *невырожденными*. Таким образом, невырожденность квадратичной формы q означает в точности то же, что невырожденность её поляризации² \tilde{q} . Под *рангом* квадратичной формы q мы понимаем ранг её поляризации \tilde{q} , равный рангу матрицы Грама Q_e в любом базисе e . Также, как и для симметричных билинейных форм, мы будем называть ненулевой вектор $v \in V$ *изотропным* для квадратичной формы q , если $q(v) = 0$. Квадратичная форма называется *анизотропной*, если $q(v) \neq 0$ при $v \neq 0$.

Из доказанных выше результатов про симметричные билинейные формы немедленно получаются аналогичные результаты про квадратичные формы.

Следствие 14.3 (из теор. 14.1 на стр. 183)

Всякая квадратичная форма q над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ в подходящих координатах записывается в виде $x_1 x_{i+1} + x_2 x_{i+2} + \dots + x_i x_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+2}, \dots, x_r)$, где $r = \text{rk}(q)$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. \square

Следствие 14.4 (из теор. 13.2 на стр. 180)

Всякая квадратичная форма над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ линейной обратимой заменой переменных приводится к виду $\sum a_i x_i^2$. \square

¹См. формулу (13-2) на стр. 170.

²См. предл. 13.1 на стр. 172.

Следствие 14.5 (из сл. 13.1 на стр. 181)

Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы $f, g: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ имеют одинаковый ранг. \square

Пример 14.1 (Квадратичные формы от двух переменных)

Согласно сл. 14.4, ненулевая квадратичная форма от двух переменных

$$q(\mathbf{x}) = a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (14-6)$$

подходящей линейной заменой координат приводятся либо к виду αt^2 с $\alpha \neq 0$, либо к виду

$$\alpha t_1^2 + \beta t_2^2, \quad \text{где } \alpha\beta \neq 0.$$

Условимся писать $\xi \sim \eta$ для таких чисел $\xi, \eta \in \mathbb{k}$, что $\xi = \lambda^2 \eta$ для какого-нибудь ненулевого $\lambda \in \mathbb{k}$. Тогда в первом случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha \cdot 0 = 0$, т. е. форма q вырождена, а во втором случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha\beta \neq 0$ и форма q невырождена. Тем самым, вырожденность ненулевой квадратичной формы (14-6) означает, что с точностью до постоянного множителя она является полным квадратом линейной формы $t \in V^*$. Такая форма q зануляется вдоль одномерного подпространства $\text{Ann}(t) \subset V$ и отлична от нуля на всех остальных векторах.

Если форма (14-6) невырождена, и у неё есть ненулевой изотропный вектор $v = (\vartheta_1, \vartheta_2)$, то из равенства $\alpha\vartheta_1^2 + \beta\vartheta_2^2 = 0$ вытекает, что $\vartheta_2 \neq 0$ и $-\det q \sim -\alpha\beta \sim -\beta/\alpha = (\vartheta_1/\vartheta_2)^2$ является квадратом в поле \mathbb{k} . В этом случае многочлен

$$\alpha t_1^2 + \beta t_2^2 = \alpha \left(t_1 + \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} t_2 \right) \left(t_1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} t_2 \right)$$

раскладывается над полем \mathbb{k} в произведение двух непропорциональных линейных форм. Поэтому квадратичная форма q , у которой $-\det q$ является ненулевым квадратом, тождественно зануляется на двух одномерных подпространствах и отлична от нуля на всех прочих векторах. Мы будем называть такие формы *гиперболическими*¹. Если же $-\det q$ не квадрат, то форма q анизотропна. Число $-\det(q) = b^2 - ac$ часто обозначают через $D/4$ и называют D *дискриминантом* квадратичной формы (14-6).

14.4. Квадратичные формы над конечными полями. Из курса алгебры известно², что для каждого простого $p \in \mathbb{N}$ любого $m \in \mathbb{N}$ существует единственное с точностью до изоморфизма поле \mathbb{F}_q из $q = p^m$ элементов, и каждое конечное поле изоморфно одному и только одному из полей \mathbb{F}_q . Следуя принятому в начале этой лекции соглашению, всюду далее мы считаем, что $p = \text{char } \mathbb{F}_q > 2$. Зафиксируем какой-нибудь элемент $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$, не являющийся квадратом.

Упражнение 14.5. Убедитесь, что ненулевые квадраты образуют в мультипликативной группе \mathbb{F}_q^* поля \mathbb{F}_q подгруппу индекса 2. В частности, нужный нам элемент ε существует, и любой ненулевой элемент поля \mathbb{F}_q умножением на подходящий ненулевой квадрат можно сделать равным либо 1, либо ε .

¹Поскольку поляризация такой формы является гиперболическим скалярным произведением.

²См. раздел 3.5 на стр. 45 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-03.pdf>.

Лемма 14.2

При любых $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q^*$ квадратичная форма $a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ на двумерном координатном пространстве \mathbb{F}_q^2 принимает все значения из поля \mathbb{F}_q .

Доказательство. В силу [упр. 14.5](#) при любых фиксированных $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q^*$ и $b \in \mathbb{F}_q$ чисел вида $a_1x_1^2$ и чисел вида $b - a_2x_2^2$, где x_1, x_2 независимо пробегает \mathbb{F}_q , имеется ровно по

$$1 + \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2}$$

штук. Следовательно эти два множества чисел имеют общий элемент $a_1x_1^2 = b - a_2x_2^2$. Тем самым, $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = b$. \square

Предложение 14.2

Каждая квадратичная форма f ранга r над полем \mathbb{F}_q в подходящих координатах записывается как $x_1^2 + \dots + x_r^2$ или как $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$, и эти две формы изометрически не изоморфны.

Доказательство. По [теор. 13.2](#) форма f в подходящих координатах записывается в виде

$$a_1x_1^2 + \dots + a_rx_r^2, \quad \text{где все } a_i \neq 0.$$

Согласно [упр. 14.5](#), умножая базисные векторы на подходящие ненулевые константы, мы можем считать, что каждое a_i равно либо 1, либо ε . Если $a_i = a_j = \varepsilon$ при каких-то $i \neq j$, то в линейной оболочке U базисных векторов e_i, e_j по [лем. 14.2](#) найдётся вектор v_i с $f(v_i) = 1$. Ортогональное дополнение к v_i в плоскости U одномерно, и форма f ограничивается на него невырождено. Пусть вектор v_j его порождает.

Упражнение 14.6. Покажите, что $f(v_j)$ является ненулевым квадратом в \mathbb{F}_q .

Заменяя e_i, e_j на $v_i, v_j / \sqrt{f(v_j)}$, мы сохраняем диагональный вид формы и уменьшаем на два количество коэффициентов, равных ε . Эту процедуру можно повторять, пока таких коэффициентов останется не более одного. Формы $f = x_1^2 + \dots + x_r^2$ и $g = x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$ изометрически не изоморфны, поскольку индуцированные ими невырожденные квадратичные формы f_{red} и g_{red} на факторах $V/\ker \tilde{f}$ и $V/\ker \tilde{g}$ исходного пространства V , где были заданы формы, имеют разные определители Грама: $\det f_{\text{red}} = 1$ является квадратом, а $\det g_{\text{red}} = \varepsilon$ — нет. \square

Предложение 14.3

Всякая квадратичная форма на пространстве размерности ≥ 3 над полем \mathbb{F}_q имеет ненулевой изотропный вектор.

Доказательство. По [теор. 13.2](#) форма записывается в подходящем базисе как

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \dots.$$

Если $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$, то вектор $(1, 0, 0, \dots)$ или вектор $(0, 1, 0, \dots)$ изотропен. Если $a_1a_2 \neq 0$, то по [лем. 14.2](#) найдутся такие $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q$, что $a_1\lambda^2 + a_2\mu^2 = -a_3$. Тогда вектор $(\lambda, \mu, 1, 0, \dots)$ изотропен. \square

Предложение 14.4 (перечисление анизотропных форм)

Анизотропные формы над полем \mathbb{F}_q , где $q = p^m$ и $p > 2$, имеются только в размерностях 1 и 2. В размерности 2 квадратичная форма $x_1^2 + x_2^2$ анизотропна если и только если $q \equiv -1 \pmod{4}$, а форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ анизотропна если и только если $q \equiv 1 \pmod{4}$.

Доказательство. Из [прим. 14.1](#) на стр. 188 вытекает, что форма $x_1^2 + x_2^2$ имеет изотропный вектор если и только если её $D/4 = -1$ является квадратом в \mathbb{F}_q . В этом случае вторая форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ анизотропна, так как $D/4 = -\varepsilon$ не является квадратом. Наоборот, если -1 не квадрат, то $-\varepsilon$ квадрат, и форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ имеет изотропный вектор. Остаётся убедиться, что -1 является квадратом в \mathbb{F}_q если и только если $q \equiv 1 \pmod{4}$. Для этого рассмотрим гомоморфизм мультипликативных групп $\gamma: \mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*$, $x \mapsto x^{\frac{q-1}{2}}$. Поскольку порядок $|\mathbb{F}_q^*| = q-1$, для каждого $x \in \mathbb{F}_q^*$ выполняется равенство $x^{q-1} = 1$, из которого вытекает, что все ненулевые квадраты лежат в $\ker \gamma$, а все $x \in \text{im } \gamma$ имеют $x^2 = 1$, откуда $\text{im } \gamma \subset \{\pm 1\}$. Так как у уравнения $x^{\frac{q-1}{2}} = 1$ не более $(q-1)/2$ корней в поле \mathbb{F}_q , образ γ имеет порядок 2, а $\ker \gamma \subset \mathbb{F}_q^*$ имеет индекс 2 и совпадает с группой квадратов, т. е. $x \in \mathbb{F}_q^*$ является квадратом тогда и только тогда, когда $x^{\frac{q-1}{2}} = 1$. В частности, -1 квадрат если и только если $(q-1)/2$ чётно. \square

14.5. Вещественные квадратичные формы. Из [сл. 14.4](#) вытекает, что любая квадратичная форма на вещественном вектором пространстве V в подходящем базисе записывается в виде

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2. \quad (14-7)$$

Для этого надо перейти к базису с диагональной матрицей Грама и поделить каждый базисный вектор e_i с $q(e_i) \neq 0$ на $\sqrt{|q(e_i)|}$. Числа p и m в представлении (14-7) называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, упорядоченная пара (p, m) — *сигнатурой*, а разность $p - m$ — просто *индексом* вещественной квадратичной формы q .

ТЕОРЕМА 14.6

Числа p и m в представлении (14-7) не зависят от выбора базиса, в котором квадратичная форма имеет вид (14-7).

Доказательство. Будем считать, что $p \geq m$, поскольку противоположный случай сводится к этому заменой q на $-q$. Сумма $p + m = \text{rk } q$ равна рангу билинейной формы \tilde{q} и не зависит от выбора базиса. Линейная оболочка базисных векторов e_k с номерами $k > p + m$ является ядром билинейной формы \tilde{q} . Классы $[e_i]$ остальных базисных векторов по модулю $\ker \tilde{q}$ образуют базис фактор пространства $W = V / \ker \tilde{q}$. По [предл. 13.6](#) на стр. 180 форма \tilde{q} корректно задаёт на W невырожденную симметричную билинейную форму $\tilde{q}_{\text{red}}([u], [w]) = \tilde{q}(u, w)$, которая в базисе из классов $[e_i]$ с $1 \leq i \leq p + m$ записывается той же самой формулой (14-7). Каждая пара базисных векторов $[e_i], [e_{p+i}]$ порождает гиперболическую плоскость с гиперболическим базисом из векторов $([e_i] \pm [e_{p+i}])/\sqrt{2}$. Поэтому форма \tilde{q}_{red} является прямой ортогональной суммой гиперболического пространства H_{2m} , натянутого на классы $[e_i], [e_{p+i}]$ с $1 \leq i \leq m$, и анизотропного пространства размерности $p - m$, натянутого на оставшиеся классы $[e_j]$ с $m < j \leq p$. По [теор. 14.4](#) на стр. 186 размерности гиперболического и анизотропного слагаемых не зависят от выбора разложения пространства со скалярным произведением в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Поэтому индекс $p - m$ и отрицательный индекс инерции m не зависят от выбора базиса, в котором форма q имеет вид (14-7). \square

Следствие 14.6 (из доказательства [теор. 14.6](#))

Для каждого n на пространстве \mathbb{R}^n с точностью до изометрического изоморфизма имеются ровно два анизотропных скалярных произведения — *евклидово* и *антиевклидово*, получающиеся

из евклидова сменой знака. Вещественные квадратичные формы положительного индекса имеют ненулевое евклидово анизотропное слагаемое, а формы отрицательного индекса — ненулевое антиевклидово анизотропное слагаемое, размерности которых равны абсолютной величине индекса. Гиперболичность невырожденной вещественной квадратичной формы равносильна тому, что её индекс равен нулю. \square

Следствие 14.7

Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые ими квадратичные формы $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеют одинаковый ранг и индекс. \square

14.5.1. Квадратичные формы на евклидовом пространстве. Если на вещественном векторном пространстве V имеется евклидова структура, то поляризацию \tilde{q} любой квадратичной формы q на V можно единственным образом представить в виде $\tilde{q}(u, w) = (u, F_q w)$, где скобки в правой части означают евклидово скалярное произведение на V , а через $F_q : V \rightarrow V$ обозначен линейный оператор, отвечающий симметричной билинейной форме \tilde{q} при задаваемом евклидовым скалярным произведением изоморфизме между формами и операторами¹. В любом евклидово ортонормальном базисе пространства V матрица оператора F_q совпадает с матрицей Грама формы \tilde{q} в этом базисе. В частности, она симметрична, а значит, оператор F_q евклидово самосопряжён. Согласно теор. 11.3 на стр. 148 в пространстве V найдётся евклидово ортонормальный базис, в котором матрица оператора F_q диагональна и имеет на диагонали в точности все собственные числа оператора F_q учётом их кратностей. Мы получаем следующие полезные результаты.

ТЕОРЕМА 14.7 (ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОМ БАЗИСЕ)

Для любой квадратичной формы q на евклидовом пространстве V существует евклидово ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы q диагональна. Диагональные элементы такой матрицы с точностью до перестановки не зависят от выбора указанного базиса и равны собственным числам того единственного линейного оператора $f : V \rightarrow V$, для которого

$$q(v) = (v, f v) \quad \text{при всех } v \in V.$$

Если все $\dim V$ собственных чисел различны, то ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы q диагональна, единственен с точностью до перестановки базисных векторов и замены их направлений на противоположные. \square

Следствие 14.8

Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ тогда и только тогда переводятся друг в друга ортогональными² заменами переменных, когда их матрицы Грама в ортонормальном базисе имеют равные характеристические многочлены. \square

14.5.2. Вычисление сигнатуры квадратичной формы на \mathbb{R}^n можно осуществить несколькими способами.

¹См. н° 13.2.4 на стр. 176.

²Т. е. сохраняющими стандартное евклидово скалярное произведение на \mathbb{R}^n

ПРИМЕР 14.2 (использование евклидовой структуры)

Согласно теор. 14.7 и предваряющему её рассуждению, положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы на \mathbb{R}^n равны количествам положительных и отрицательных собственных чисел (с учётом кратностей) матрицы Грама этой формы в любом ортонормальном для стандартной евклидовой структуры базисе пространства \mathbb{R}^n .

ПРИМЕР 14.3 (метод Якоби – Сильвестра)

Обозначим через $V_k \subset \mathbb{R}^n$ линейную оболочку первых k базисных векторов e_1, \dots, e_k , а через Δ_k их определитель Грама, т. е. рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевые положительные числа¹ главный угловой $k \times k$ минор матрицы Грама формы, сосредоточенный в первых k строках и столбцах. Если ограничение формы на подпространство V_k неособо, то знак $\operatorname{sgn} \Delta_k = (-1)^{m_k}$, где показатель m_k равен отрицательному индексу инерции ограничения формы на V_k . Таким образом, когда все $\Delta_i \neq 0$, соседние миноры Δ_k, Δ_{k+1} различаются знаком если и только если отрицательный индекс инерции $m_{k+1} = m_k + 1$. Поэтому полный отрицательный индекс инерции $m = m_n$ в этом случае равен числу перемен знака в последовательности $1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$.

Если некоторый $\Delta_k = 0$, но при этом Δ_{k-1} и Δ_{k+1} оба ненулевые, то ограничения формы на подпространства V_{k+1} и V_{k-1} , а также на двумерное ортогональное дополнение W к подпространству V_{k-1} внутри V_{k+1} невырождены, и в W имеется изотропный вектор, порождающий ядро ограничения формы на подпространство V_k , где она вырождена. Тем самым, $W \simeq H_2$ является гиперболической плоскостью с сигнатурой $(1, 1)$, и из ортогонального разложения $V_{k+1} = V_{k-1} \dot{+} W$ вытекает равенство $(p_{k+1}, m_{k+1}) = (p_{k-1} + 1, m_{k-1} + 1)$. Обратите внимание, что в этом случае Δ_{k-1} и Δ_{k+1} имеют противоположные знаки, т. е. при $\Delta_k = 0$ неравенство $\Delta_{k-1}\Delta_{k+1} > 0$ невозможно.

Если $\Delta_k = \Delta_{k+1} = 0$, но при этом $\Delta_{k-1}\Delta_{k+2} \neq 0$, то $V_{k+2} = V_{k-1} \dot{+} W$, где W — трёхмерное ортогональное дополнение к V_{k-1} внутри V_{k+2} . Как и выше, ограничение формы на W невырождено, и в W есть изотропный вектор. Поэтому W имеет сигнатуру $(2, 1)$ или $(1, 2)$ и

$$\begin{aligned} (p_{k+2}, m_{k+2}) &= (p_{k-1} + 2, m_{k-1} + 1), & \text{если } \Delta_{k-1}\Delta_{k+2} < 0, \\ (p_{k+2}, m_{k+2}) &= (p_{k-1} + 1, m_{k-1} + 2), & \text{если } \Delta_{k-1}\Delta_{k+2} > 0. \end{aligned}$$

Итак, когда в последовательности $1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ не встречается более двух нулей подряд, прочтение её слева направо позволяет проследить за изменением сигнатуры (p_i, m_i) ограничения формы на пространства V_i с ненулевыми Δ_i и найти индекс.

Скажем, пусть $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 = 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0$. Тогда

$$(p_1, m_1) = (0, 1), \quad (p_3, m_3) = (2, 1), \quad (p_6, m_6) = (4, 2).$$

Примером такой формы является форма с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¹Т. е. на ненулевые квадраты поля \mathbb{R} .

Пример 14.4 (метод Гаусса)

Над любым полем \mathbb{k} перейти от произвольного базиса e_1, \dots, e_n к ортогональному базису заданной симметричной билинейной формы \tilde{q} можно при помощи гауссовых элементарных преобразований базисных векторов¹: перестановок каких-нибудь двух векторов e_i, e_j местами и замен одного из базисных векторов e_i на вектор $e'_i = e_i + \lambda e_j$, где $j \neq i$, а $\lambda \in \mathbb{k}$ произвольно, или на вектор $e'_i = \lambda e_i$, где $\lambda \in \mathbb{k}^*$ отлично от нуля. При перестановке местами векторов e_i, e_j в матрице Грама формы \tilde{q} одновременно² переставляются друг с другом i -я и j -я строки, а также i -й и j -й столбцы. Обратите внимание, что диагональные элементы $\tilde{q}(e_i, e_i)$ и $\tilde{q}(e_j, e_j)$ при этом переставляются друг с другом, а элементы $\tilde{q}(e_i, e_j) = \tilde{q}(e_j, e_i)$ остаются без изменения, и матрица в целом остаётся симметричной. Например, перестановка первого и третьего базисного вектора действует на симметричную 3×3 матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f & e & c \\ e & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Если заменить вектора e_i на λe_i , то i -я строка и i -й столбец матрицы Грама умножатся на λ (всё равно в каком порядке). Обратите внимание, что диагональный элемент $\tilde{q}(e_i, e_i)$ при этом умножится на λ^2 . Например, замена e_2 на $2e_2$ подействует на предыдущую матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2b & c \\ 2b & 4d & 2e \\ c & 2e & f \end{pmatrix}.$$

Наконец, замена e_i на $e'_i = e_i + \lambda e_j$ преобразует стоящие в i -й строке и i -м столбце недиагональные элементы $q_{ik} = \tilde{q}(e_i, e_k)$ и $q_{ki} = \tilde{q}(e_k, e_i)$ с $k \neq i$ в элементы $q'_{ik} = q_{ik} + \lambda q_{jk}$ и $q'_{ki} = q_{ki} + \lambda q_{kj}$ соответственно, а диагональный элемент $q_{ii} = \tilde{q}(e_i, e_i)$ — в $q'_{ii} = q_{ii} + \lambda q_{ij} + \lambda q_{ji} + \lambda^2 q_{jj}$, т. е. к i -й строке матрицы Грама прибавится j -я, умноженная на λ , после чего в получившейся матрице к i -у столбцу матрицы прибавится j -й, умноженный на λ . Обратите внимание, что те же действия можно произвести в другой последовательности: сначала к i -у столбцу матрицы прибавить j -й, умноженный на λ , а потом в полученной матрице к i -у столбцу прибавить j -й, умноженный на λ , — результат получится тот же, и матрица в целом останется симметричной. Например, замена e_3 на $e_3 + 3e_2$ подействует на предыдущую матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c + 3b \\ b & d & e + 3d \\ c + 3b & e + 3d & f + 6e + 9d \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса заключается в том, чтобы при помощи описанных трёх типов преобразований матрицы Грама превратить заданную симметричную матрицу в диагональную³. Для вещественной формы количества положительных и отрицательных чисел на диагонали итоговой матрицы — это в точности положительный и отрицательный индексы инерции.

¹См. п. 6.1 на стр. 72.

²Точнее, i -я строка переставляется с j -й, а потом i -й столбец переставляется с j -м, либо в другой последовательности: сначала i -й столбец переставляется с j -м, а потом i -я строка переставляется с j -й, и результат не зависит от того, какая перестановка осуществляется первой, а какая второй.

³Обратите внимание, что эта процедура похожа на ортогонализацию Грама – Шмидта из предл. 10.1 на стр. 131, только порядок действий предлагается таким, как в доказательстве теор. 13.2 на стр. 180: выбрать базисный вектор с ненулевым скалярным квадратом, спроектировать все остальные базисные векторы на ортогонал к нему, затем выбрать среди них вектор с ненулевым квадратом и т. д.

Для иллюстрации вычислим методом Гаусса сигнатуру вещественной квадратичной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сначала обнулیم¹ 1-ю строку и 1-й столбец вне диагонали, добавляя к векторам e_2, e_4 соответственно векторы $2e_1$ и $-3e_1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь обнулیم вне диагонали 2-ю строку и 2-й столбец, добавляя к текущим векторам e_3, e_4 соответственно текущие векторы $e_1/6$ и e_1 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Наконец, обнулیم вне диагонали 3-ю строку и 3-й столбец, добавляя к текущему вектору e_4 текущий вектор $-18e_3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, форма имеет сигнатуру $(2, 2)$.

14.6. Самосопряжённые операторы. Пусть на векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} задана невырожденная симметричная билинейная форма

$$(*, *): V \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u, w \mapsto (u, w). \quad (14-8)$$

Как и в евклидовом пространстве², будем называть линейный оператор $f: V \rightarrow V$ *самосопряжённым* относительно скалярного произведения (14-8), если $(fu, w) = (u, fw)$ при всех $u, w \in V$. Самосопряжённость оператора f равносильна тому, что при биекции между формами и операторами, которая задаётся скалярным произведением³ (14-8), отвечающая оператору f билинейная форма $\beta_f(u, w) = (u, fw)$ является симметричной.

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Убедитесь в этом.

¹Обратите внимание, что вычисления достаточно проделывать только для клеток, стоящих на главной диагонали и под нею — наддиагональная часть матрицы восстанавливается из соображений симметрии.

²Ср. с п° 11.2 на стр. 146.

³См. п° 13.2.4 на стр. 176.

На матричном языке самосопряжённость оператора f означает, что его матрица F в любом базисе пространства V связана с матрицей Грама G скалярного произведения (14-8) в том же базисе соотношением $F^t G = GF$. Дословно теми же рассуждениями, что и для евклидовых пространств¹ устанавливаются два ключевых свойства самосопряжённых операторов:

- УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Пусть линейный оператор $f : V \rightarrow V$ самосопряжён. Покажите, что
- для любого f -инвариантного подпространства $U \subset V$ ортогонал U^\perp тоже f -инвариантен
 - собственные векторы оператора f с разными собственными значениями ортогональны.

Предложение 14.5

Если характеристический многочлен самосопряжённого линейного оператора $f : V \rightarrow V$ полностью раскладывается в поле \mathbb{k} на линейные множители и все ненулевые собственные векторы оператора f анизотропны, то в пространстве V имеется ортогональный базис из собственных векторов оператора f .

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если оператор f является умножением на скаляр (что имеет место при $\dim V = 1$), то подойдёт любой ортогональный базис пространства V . Допустим, что $\dim V > 1$ и оператор f не скалярен. Поскольку характеристический многочлен $\det(tE - F)$ имеет корни в поле \mathbb{k} , у оператора F есть ненулевое собственное подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\} \subsetneq V.$$

По условию леммы, оно анизотропно, и значит, скалярное произведение ограничивается на него невырождено. Поэтому $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, и ограничение скалярного произведения на V_λ^\perp тоже невырождено. По упр. 14.8 оператор f переводит подпространство V_λ^\perp в себя. Тем самым, характеристический многочлен оператора f является произведением характеристических многочленов ограничений $f|_{V_\lambda}$ и $f|_{V_\lambda^\perp}$. В силу единственности разложения на множители в кольце $\mathbb{k}[t]$ и предположения леммы, каждый из этих двух характеристических многочленов полностью раскладывается на линейные множители в поле \mathbb{k} . По индуктивному предположению, в подпространстве V_λ^\perp есть ортогональный базис из собственных векторов оператора f . Добавляя к нему любой ортогональный базис собственного пространства V_λ , получаем нужный базис в V . \square

¹См. лем. 11.2 и лем. 11.3 на стр. 148.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 14.5. Ненулевые квадраты составляют образ гомоморфизма мультипликативных групп

$$\mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*, \quad x \mapsto x^2.$$

Так как уравнение $x^2 = 1$ имеет в поле \mathbb{F}_q ровно два корня $x = \pm 1$, ядро этого гомоморфизма состоит из двух элементов, а значит, образ является подгруппой порядка $(q - 1)/2$.

Упр. 14.6. Исходный базис (e_i, e_j) плоскости U имеет определитель Грама ε^2 , а определитель Грама базиса (v_i, v_j) равен $f(v_j)$.

Упр. 14.7. Если оператор f самосопряжён, то $\beta_f(u, w) = (u, fw) = (fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u)$.

Если билинейная форма β_f симметрична, то $(fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u) = \beta_f(u, w) = (u, fw)$

Упр. 14.8. Пусть $w \in U^\perp$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, fw) = (fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, ибо $fu \in U$. Тем самым, $fw \in U^\perp$. Если $fu = \lambda u$ и $fw = \mu w$, то из равенства $(fu, w) = (u, fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$.