§13. Пространство с билинейной формой

13.1. Билинейные формы. Отображение $\beta : V \times V \to \Bbbk$ называется *билинейной формой* на векторном пространстве V, если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1u_1 + x_2u_2, y_1w_1 + y_2w_2) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \beta(u_i, w_j) \tag{13-1}$$

при всех $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \Bbbk$.

Упражнение 13.1. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $V \times V \to \Bbbk$.

Если форма β на пространстве V зафиксирована, то её значение $\beta(u, w) \in \Bbbk$ на паре векторов $u, w \in V$ иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения* $u \cdot w$, принимающего значения в поле $\Bbbk$ и, вообще говоря, некоммутативного. В таких обозначениях формула (13-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок:

$$(x_1u_1 + x_2u_2) \cdot (y_1w_1 + y_2w_2) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \, u_i \cdot w_j \, .$$

13.1.1. Матрицы Грама. Как и в евклидовом пространстве[1], в каждом пространстве с билинейной формой с любыми двумя наборами векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots w_m)$, где все $u_i, w_j \in V$, связана матрица их попарных скалярных произведений $B_{\boldsymbol{uw}} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{w} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ с элементами $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$. Она называется *матрицей Грама* наборов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ и формы β. Когда наборы совпадают: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$, мы пишем просто $B_{\boldsymbol{u}}$ вместо $B_{\boldsymbol{uu}}$. В этом случае $\det B_{\boldsymbol{u}} \in \Bbbk$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов $\boldsymbol{u}$.

Если наборы векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ линейно выражаются через наборы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ по формулам $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{eu}}$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fw}}$, то $B_{\boldsymbol{uw}} = \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{w} = \left(\boldsymbol{e}C_{\boldsymbol{eu}}\right)^t \left(\boldsymbol{f}C_{\boldsymbol{fw}}\right) = C_{\boldsymbol{eu}}^t \boldsymbol{e}^t \boldsymbol{f} C_{\boldsymbol{fw}} = C_{\boldsymbol{eu}}^t B_{\boldsymbol{ef}} C_{\boldsymbol{fw}}$. В частности, если $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\, C_{\boldsymbol{wu}}$, то

$$B_{\boldsymbol{u}} = C_{\boldsymbol{wu}}^t B_{\boldsymbol{w}} C_{\boldsymbol{wu}} \, . \tag{13-2}$$

Если векторы $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots e_n)$ образуют базис в V, а векторы $u = \boldsymbol{e}\, x$ и $w = \boldsymbol{e}\, y$ заданы столбцами $x, y \in \Bbbk^n$ своих координат в этом базисе, то

$$\beta(u, w) = u^t \cdot w = x^t \boldsymbol{e}^t \cdot \boldsymbol{e} y = x^t B_{\boldsymbol{e}} y \, . \tag{13-3}$$

Так как любая квадратная матрица $B_{\boldsymbol{e}} \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве V, сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на n-мерном векторном пространстве V и пространством матриц размера $n \times n$.

Упражнение 13.2. Убедитесь, что эта биекция линейна.

[1] Ср. с n° 10.2 на стр. 133.

13.1.2. Корреляции. Задание билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ эквивалентно заданию линейного отображения *правой корреляции* $\beta^\wedge : V \to V^*$, сопоставляющего каждому вектору $v \in V$ линейный функционал $\beta^\wedge v : V \to \Bbbk$, который задаётся правым скалярным умножением на вектор v и является ограничением билинейного отображения $\beta : V \times V \to \Bbbk$ на подмножество $V \times \{v\} \subset V \times V$:

$$\beta^\wedge v : V \to \Bbbk\,, \quad u \mapsto u \cdot v = \beta(u, v)\,. \tag{13-4}$$

Упражнение 13.3. Убедитесь, что для каждого $v \in V$ функционал (13-4) линеен и линейно зависит от v.

Форма $\beta : V \times V \to \Bbbk$ однозначно восстанавливается по правой корреляции $\beta^\wedge : V \to V^*$ как

$$\beta(u, w) = \beta^\wedge w(u)\,.$$

Если зафиксировать в V и V^* двойственные базисы $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots e_n)$ и $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, \dots e_n^*)$, то в этих базисах матрица $B^\wedge_{\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}}$ линейного отображения $\beta^\wedge : V \to V^*$ имеет в клетке (i, j) значение i-той координаты функционала $\beta^\wedge e_j : u \mapsto \beta(u, e_j)$ в базисе $\boldsymbol{e}^*$, которая равна[1] значению этого функционала на базисном векторе e_i, т. е. скалярному произведению $\beta(e_i, e_j)$. Таким образом, матрица правой корреляции $B^\wedge_{\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}$ совпадёт с матрицей Грама формы β в базисе $\boldsymbol{e}$. Мы заключаем, что сопоставление билинейной форме β её правой корреляции $\beta^\wedge$ устанавливает линейный изоморфизм пространства билинейных форм на V с пространством линейных отображений $V \to V^*$.

Симметричным образом, задание билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ эквивалентно заданию *левой корреляции* ${}^\wedge\beta : V \to V^*$, которая переводит каждый вектор $v \in V$ в линейный функционал ${}^\wedge\beta v : V \to \Bbbk$, получающийся ограничением отображения $\beta : V \times V \to \Bbbk$ на подмножество $\{v\} \times V \subset V \times V$ и задаваемый левым скалярным умножением на вектор v:

$${}^\wedge\beta v : V \to \Bbbk\,, \quad u \mapsto \beta(v, u) = v \cdot u\,. \tag{13-5}$$

Иначе можно сказать, что левая корреляция билинейной формы β является правой корреляцией для *транспонированной* формы $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$, матрица Грама которой транспонирована к матрице Грама формы β. Поэтому матрица левой корреляции билинейной формы β в двойственных базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}^*$ пространств V и V^* равна транспонированной матрице Грама $B_{\boldsymbol{e}}^t$ формы β в базисе $\boldsymbol{e}$.

13.1.3. Ядра, ранг и коранг. Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall\, v \in V \ \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker {}^\wedge\beta = \{u \in V \mid \forall\, v \in V \ \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \tag{13-6}$$

называются соответственно *правым* и *левым* ядром билинейной формы β. Если форма β не является симметричной или кососимметричной[2], то подпространства $V^\perp$ и ${}^\perp V$, вообще говоря, различны. Тем не менее, их размерности всегда одинаковы и равны

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V = \dim V - \operatorname{rk} B_{\boldsymbol{e}}\,, \tag{13-7}$$

[1] См. n° 7.1.1 на стр. 85.

[2] Т. е. не удовлетворяет соотношениям $\beta^t = \pm\beta$. Мы подробнее поговорим о таких формах в n° 13.4 на стр. 179 ниже.

где $B_{\boldsymbol{e}}$ — матрица Грама формы β в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V, поскольку ранги[1] $\operatorname{rk} B_{\boldsymbol{e}} = \operatorname{rk} B_{\boldsymbol{e}}^t$ равны размерностям образов $\operatorname{im}\beta^\wedge$ и $\operatorname{im}{}^\wedge\beta$ операторов правой и левой корреляций, а $\dim\ker\beta^\wedge = \dim V - \dim\operatorname{im}\beta^\wedge$ и $\dim\ker{}^\wedge\beta = \dim V - \dim\operatorname{im}{}^\wedge\beta$. В частности, мы видим, что ранг матрицы Грама $B_{\boldsymbol{e}}$, равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* билинейной формы β и обозначается $\operatorname{rk}\beta$, а разность $\dim V - \operatorname{rk}\beta$ из формулы (13-7) называется *корангом* формы β и обозначается $\operatorname{cork}\beta$.

13.1.4. Изометрии. Линейное отображение $f : U \to W$ между векторными пространствами U и W, на которых заданы билинейные формы β и γ, называется *изометрическим* или *гомоморфизмом пространств с билинейными формами*, если для любых векторов $u_1, u_2 \in U$ выполняется равенство $\beta(u_1, u_2) = \gamma\big(f(u_1), f(u_2)\big)$. Билинейные формы β и γ называются *изоморфными*, если между пространствами U и W имеется изометрический линейный изоморфизм.

Если произвольно зафиксировать в U и W базисы $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$, то отображение f с матрицей $F_{\boldsymbol{wu}}$ в этих базисах является изометрическим если и только если матрица Грама набора векторов $f(\boldsymbol{u}) = (f(u_1), \dots, f(u_n)) = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}$ равна матрице Грама базиса $\boldsymbol{u}$. По форм. (13-2) на стр. 170 это равносильно матричному равенству

$$F_{\boldsymbol{wu}}^t B_{\boldsymbol{w}} F_{\boldsymbol{wu}} = B_{\boldsymbol{u}}\,. \tag{13-8}$$

13.2. Невырожденные формы. Билинейная форма β называется *невырожденной*[2], если она удовлетворяет условиям следующего ниже предл. 13.1. Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 13.1 (критерии невырожденности)
Следующие свойства билинейной формы β на конечномерном векторном пространстве V равносильны друг другу:

1) в V существует базис с ненулевым определителем Грама

2) любой базис в V имеет ненулевой определитель Грама

3) левая корреляция ${}^\wedge\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом

4) правая корреляция $\beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом

5) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(v, u) \neq 0$

6) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(u, v) \neq 0$

7) для любой линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ существует такой вектор $v \in V$, что
$$\varphi(u) = \beta(v, u) \quad \text{для всех } u \in V$$

8) для любой линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ существует такой вектор $v \in V$, что
$$\varphi(u) = \beta(u, v) \quad \text{для всех } u \in V\,,$$

[1] Напомню, что транспонированные матрицы имеют одинаковый ранг, см. теор. 5.1 на стр. 67 и прим. 7.5 на стр. 88.

[2] А также *неособой* или *регулярной*.

причём при выполнении этих условий вектор v в последних двух пунктах определяется формой φ однозначно.

Доказательство. Поскольку $\dim V = \dim V^*$, биективность, инъективность и сюрьективность линейного отображения $V \to V^*$ равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия (4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюрьективность для операторов $^\wedge\beta$ и $\beta^\wedge$, равносильны между собой и условию (1), означающему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (13-2) на стр. 170, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ связаны друг с другом по формуле $\det B_{\boldsymbol{e}} = \det B_{\boldsymbol{f}} \cdot \det^2 C_{\boldsymbol{fe}}$, где $C_{\boldsymbol{fe}}$ — матрица перехода[1] от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$. □

Пример 13.1 (евклидова форма)
Симметричная билинейная форма на координатном пространстсве $\Bbbk^n$ с единичной матрицей Грама E в стандартном базисе называется *евклидовой*. Эта форма невырождена и над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ задаёт евклидову структуру на пространстве $\mathbb{R}^n$. Однако над отличными от $\mathbb{R}$ полями свойства этой формы могут существенно отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем $\mathbb{C}$ ненулевой вектор $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$ имеет нулевой скалярный квадрат.

Упражнение 13.4. Приведите пример n-мерного подпространства в $\mathbb{C}^{2n}$, на которое евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна E называются *ортонормальными*. Ниже[2] мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

Пример 13.2 (гиперболическая форма)
Симметричная билинейная форма h на чётномерном координатном пространстве $\Bbbk^{2n}$, матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{13-9}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2\nu-1} = \left(e_\nu - e_{n+\nu}\right)/\sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2\nu} = \left(e_\nu + e_{n+\nu}\right)/\sqrt{2}\,, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n\,.$$

Над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых n базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (13-9), называется *гиперболическим базисом*.

[1] См. n° 5.3 на стр. 63.
[2] См. сл. 13.1 на стр. 181.

Пример 13.3 (симплектическая форма)
Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве $\Bbbk^{2n}$, матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{13-10}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *симплектической*. Матрица J вида (13-10) называется *симплектической единицей*. Она имеет $J^2 = -E$ и $\det J = 1$. Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна J, называется *симплектическим базисом*. Ниже[1] мы покажем, что всякая невырожденная кососимметричная билинейная форма над *любым* полем изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

Упражнение 13.5. Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётного размера над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ вырождены.

13.2.1. Левый и правый двойственный базис. Если билинейная форма β на пространстве V невырождена, то у любого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots e_n)$ в V есть *правый* и *левый* двойственные базисы $\boldsymbol{e}^\vee = (e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$ и ${}^\vee\boldsymbol{e} = ({}^\vee e_1, \dots, {}^\vee e_n)$, состоящие из прообразов векторов двойственного к $\boldsymbol{e}$ базиса $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ в V^* относительно изоморфизмов правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta\left(e_i, e_j^\vee\right) = \beta\left({}^\vee e_i, e_j\right) = \delta_{ij}, \tag{13-11}$$

которые на матричном языке означают, что взаимные матрицы Грама двойственных относительно формы β базисов единичные: $B_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\vee} = B_{{}^\vee\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}} = E$. Согласно формулам из n° 13.1.1 матрицы переходов $C_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^\vee}$ и $C_{\boldsymbol{e},{}^\vee\boldsymbol{e}}$, в j-тых столбцах которых стоят координаты векторов $e_j^\vee$ и ${}^\vee e_j$ в базисе $\boldsymbol{e}$, удовлетворяют соотношениям $B_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^\vee} = B_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^\vee} = E$ и $C_{\boldsymbol{e},{}^\vee\boldsymbol{e}}^t B_{\boldsymbol{e}} = B_{{}^\vee\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}} = E$, откуда

$$C_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^\vee} = B_{\boldsymbol{e}}^{-1} \quad \text{и} \quad C_{\boldsymbol{e}\,{}^\vee\boldsymbol{e}} = \left(B_{\boldsymbol{e}}^t\right)^{-1}.$$

Знание двойственного к базису $\boldsymbol{e}$ относительно билинейной формы β базиса позволяет находить коэффициенты разложения любого вектора $v \in V$ по каждому из двойственных базисов как взятые с надлежащей стороны скалярные произведения вектора v с соответствующими элементами двойственного базиса:

$$v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v)\, e_i = \sum_i \beta(v, e_i^\vee)\, e_i = \sum_i \beta(v, e_i)\, {}^\vee e_i = \sum_i \beta(e_i, v)\, e_i^\vee. \tag{13-12}$$

Упражнение 13.6. Убедитесь в этом.

13.2.2. Изотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для билинейной формы β, если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$. Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых n и последних n базисных векторов пространства $\Bbbk^{2n}$ изотропны для гиперболической формы из прим. 13.2 и симплектической формы из прим. 13.3.

[1] См. теор. 13.3 на стр. 181.

Предложение 13.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве V не превосходит $\dim V/2$.

Доказательство. Подпространство $U \subset V$ изотропно если и только если его образ при корреляции $\beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$ лежит в подпространстве $\operatorname{Ann} U \subset V^*$. Так как корреляция невырожденной формы инъективна, $\dim U \leqslant \dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$, откуда $2\dim U \leqslant \dim V$. □

Замечание 13.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 13.2 в общем случае неулучшаема.

13.2.3. Группа изометрий. Как мы видели в n° 13.1.4 на стр. 172, линейный эндоморфизм $f : V \to V$ является изометрическим для билинейной формы β на пространстве V если и только если его матрица $F_{\boldsymbol{e}}$ в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V связана с матрицей Грама $B_{\boldsymbol{e}}$ этого базиса соотношением[1] $F_{\boldsymbol{e}}^t B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}$. Если форма β невырождена, то беря определители обеих частей, заключаем, что $\det^2 F_{\boldsymbol{e}} = 1$, откуда $\det F_{\boldsymbol{e}} = \pm 1$. Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима и с точностью до знака сохраняет объём. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства V образуют группу. Она обозначается $\mathrm{O}_\beta(V)$ и называется *группой изометрий*[2] невырожденной билинейной формы β. Изометрии определителя 1 называются *специальными* или *собственными* и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую $\mathrm{SO}_\beta(V)$.

Из форм. (13-8) на стр. 172 вытекает, что обратная к изометрии f изометрия имеет матрицу

$$F_{\boldsymbol{e}}^{-1} = B_{\boldsymbol{e}}^{-1} F_{\boldsymbol{e}}^t B_{\boldsymbol{e}} \,. \tag{13-13}$$

Пример 13.4 (изометрии вещественной гиперболической плоскости)

Оператор $f : H_2 \to H_2$, имеющий в стандартном гиперболическом базисе $e_1, e_2 \in H_2$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde F_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{где } \lambda \in \Bbbk^* = \Bbbk \smallsetminus \{0\}. \tag{13-14}$$

Над полем $\mathbb{R}$ оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор $v = (x, y)$, обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ по гиперболе $xy = \mathrm{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и

[1] См. формулу (13-8) на стр. 172.

[2] А также *ортогональной группой* или *группой автоморфизмов*.

перейти к ортогональному базису из векторов $p = (e_1+e_2)/\sqrt{2}$, $q = (e_1-e_2)/\sqrt{2}$, то оператор F_λ запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{ch} t \overset{\text{def}}{=} (e^t+e^{-t})/2$ и $\operatorname{sh} t \overset{\text{def}}{=} (e^t-e^{-t})/2$ называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа t. Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор $\widetilde{F}_\lambda$ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно той оси гиперболы, которая пересекается с её ветвями.

13.2.4. Биекция между формами и операторами. На пространстве V с билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$ каждому линейному оператору $f : V \to V$ можно сопоставить билинейную форму $\beta_f(u,w) \overset{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$ с матрицей Грама $\boldsymbol{e}^t \cdot f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^t \cdot \boldsymbol{e}\, F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}}$ в произвольно выбранном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V. Поскольку на языке матриц отображение $f \mapsto \beta_f$ заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама: $F_{\boldsymbol{e}} \mapsto B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}}$, оно линейно и обратимо, если форма β невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма

$$\alpha : V \times V \to \Bbbk$$

на конечномерном векторном пространстве V с фиксированной невырожденной билинейной формой β имеет вид $\alpha(u,w) = \beta(u, f_\alpha w)$ для некоторого линейного оператора $f_\alpha : V \to V$, однозначно определяемого формой α. Матрица $F_{\boldsymbol{e}}$ оператора f_α выражается через матрицы Грама $B_{\boldsymbol{e}}$ и $A_{\boldsymbol{e}}$ форм β и α по формуле $F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}^{-1} A_{\boldsymbol{e}}$.

Пример 13.5 (канонический оператор)
Задаваемая невырожденной билинейной формой β биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к β форме $\beta^t(u,w) \overset{\text{def}}{=} \beta(w,u)$ оператор $\varkappa : V \to V$, который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы β и однозначно характеризуется свойством

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta(w,u) = \beta(u, \varkappa w). \tag{13-15}$$

Матрица $K_{\boldsymbol{e}}$ канонического оператора в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V выражается через матрицу Грама $B_{\boldsymbol{e}}$ формы β по формуле $K_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}^{-1} B_{\boldsymbol{e}}^t$.

Упражнение 13.7. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу $B \mapsto C^t B C$, где $C \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, матрица $K = B^{-1}B^t$ меняется по правилу $K \mapsto C^{-1} K C$, т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как $\beta(u,w) = \beta(w, \varkappa u) = \beta(\varkappa u, \varkappa w)$ для всех $u, w \in V$, канонический оператор является изометрическим.

Теорема 13.1
Над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, две невырожденные билинейные формы изометрически изоморфны если и только если их канонические операторы подобны.

Доказательство. Импликация «только если» вытекает из упр. 13.7 и имеет место над любым полем. Докажем обратную импликацию. Пусть невырожденные билинейные формы α и β имеют подобные канонические операторы $\varkappa_\alpha$ и $\varkappa_\beta = g^{-1} \varkappa_\alpha g$. Тогда форма $\alpha'(u,w) = \alpha(gu, gw)$

изометрически изоморфна форме α и имеет канонический оператор $g^{-1}\varkappa_\alpha g = \varkappa_\beta$, поскольку $\alpha'(u,w) = \alpha(gu, gw) = \alpha(gw, \varkappa_\alpha gu) = \alpha'(w, g^{-1}\varkappa_\alpha gu)$ для всех u, w. Таким образом, заменяя форму α на форму α', мы без ограничения общности можем считать, что формы α и β имеют один и тот же канонический оператор $\varkappa$. Линейный оператор f, однозначно определяемый равенством $\beta(u,w) = \alpha(u, fw)$ для всех u, w, обратим в силу невырожденности форм α, β и самосопряжён относительно α в том смысле[1], что для всех u, w выполняется равенство

$$\alpha(fu, w) = \alpha(\varkappa^{-1}w, fu) = \beta(\varkappa^{-1}w, u) = \beta(u, w) = \alpha(u, fw)\,.$$

Любой многочлен от оператора f тоже самосопряжён относительно формы α. В силу идущей ниже лем. 13.1, над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль существует такой многочлен $P(t)$, что оператор $h = P(f)$ удовлетворяет равенству $h^2 = f$. Такой оператор h биективен и самосопряжён относительно α. Поэтому форма

$$\beta(u,w) = \alpha(u, fw) = \alpha(u, h^2 w) = \alpha(hu, hw)$$

изометрически изоморфна форме α. □

Лемма 13.1

Над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, из любого биективного линейного оператора f на конечномерном векторном пространстве V можно извлечь квадратный корень, являющийся многочленом от оператора f.

Доказательство. Из курсов алгебры и комбинаторики известно, что при всех целых $k \geqslant 0$ биномиальный коэффициент $\binom{2k}{k}$ нацело делится[2] на $(k+1)$. Поэтому над любым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ корректно определён биномиальный степенной ряд

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{1/2}{k}x^k = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}\cdot 3\cdot 5\cdot\,\cdots\,\cdot(2k-3)\cdot x^k =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}}\binom{2k-2}{k-1}\frac{x^k}{k}\,. \tag{13-16}$$

Упражнение 13.8. Убедитесь в том, что квадрат многочлена, равного сумме первых $n+1$ членов этого ряда, сравним в $\Bbbk[x]$ с $1+x$ по модулю x^{n+1}.

Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристический многочлен $\chi_f(t)$ оператора f разлагается на взаимно простые множители $(t-\lambda)^{m_\lambda}$, где $\lambda \in \operatorname{Spec}(f)$, и пространство V распадается в прямую сумму f-инвариантных корневых подпространств[3] $K_\lambda = \ker(f - \lambda\mathrm{Id})^{m_\lambda}$. Так как f биективен, в этом разложении все λ отличны от нуля, и для каждого λ корректно определён многочлен $p_\lambda(t) \in \Bbbk[t]$, равный сумме первых m_λ членов формального разложения Тэйлора

[1] Ср. с n° 11.3 на стр. 147.

[2] Частное $c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ называется k-тым *числом Каталана* и имеет несколько чисто комбинаторных описаний, см. пример 4.7 на стр. 61 лекции:
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_04.pdf.

[3] См. n° 9.4 на стр. 124.

функции $\sqrt{t}$ в точке λ, которое получается из биномиальной формулы (13-16) заменой переменных:

$$\sqrt{t} = \sqrt{\lambda + (t-\lambda)} = \sqrt{\lambda}\cdot\left(1 + \lambda^{-1/2}(t-\lambda)\right)^{1/2} = \\ = \lambda^{1/2} + \frac{1}{2}(t-\lambda) - \frac{\lambda^{-1/2}}{8}(t-\lambda)^2 + \frac{\lambda^{-1}}{16}(t-\lambda)^3 - \cdots .$$

Согласно упр. 13.8, $p_\lambda^2(t) \equiv t \bmod (t-\lambda)^{m_\lambda}$. По китайской теореме об остатках существует многочлен $p(t)$, сравнимый с $p_\lambda(t)$ по модулю $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Его квадрат

$$p^2(t) \equiv t \bmod (t-\lambda)^{m_\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \mathrm{Spec}(f)\,.$$

Поэтому квадрат оператора $p(f)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ точно также, как f. Тем самым, $p^2(f) = f$. □

13.3. Ортогоналы и ортогональные проекции. С каждым подпространством U векторного пространства V с билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$ связаны *левый* и *правый ортогоналы*

$$\begin{aligned} {}^\perp U &= \{v \in V \mid \forall\, u \in U\ \beta(v,u) = 0\}\,, \\ U^\perp &= \{v \in V \mid \forall\, u \in U\ \beta(u,v) = 0\}\,. \end{aligned} \tag{13-17}$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в V.

Предложение 13.3

Если билинейная форма β на конечномерном пространстве V невырождена, то для всех подпространств $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^\perp U = \dim V - \dim U = \dim U^\perp \quad \text{и} \quad ({}^\perp U)^\perp = U = {}^\perp(U^\perp)\,.$$

Доказательство. Первые два равенства верны, так как ортогоналы (13-17) суть прообразы подпространства $\mathrm{Ann}\,U \subset V^*$ при изоморфизмах ${}^\wedge\beta, \beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$, и $\dim \mathrm{Ann}\,U = \dim V - \dim U$. Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства $({}^\perp U)^\perp$ и ${}^\perp(U^\perp)$ содержат U и имеют размерность $\dim U$. □

Предложение 13.4

Пусть билинейная форма β на произвольном[1] векторном пространстве V ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму $\beta|_U : U \times U \to \Bbbk$. Тогда $V = U \oplus U^\perp$, и проекция $v_U \in U$ каждого вектора $v \in V$ на подпространство U вдоль $U^\perp$ однозначно определяется тем, что $\beta(u,v) = \beta(u,v_U)$ для всех $u \in U$. Вектор v_U выражается через произвольный базис $u_1, \dots, u_n$ пространства U по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^{n} \beta\left({}^\vee u_i, v\right)\, u_i = \sum_{i=1}^{n} \beta\left(u_i, v\right)\, u_i^\vee\,, \tag{13-18}$$

где ${}^\vee u_1, \dots, {}^\vee u_n$ и $u_1^\vee, \dots, u_n^\vee$ суть левый и правый двойственные к $u_1, \dots, u_n$ относительно формы β базисы[2] в U.

[1] Возможно даже бесконечномерном.

[2] См. n° 13.2.1 на стр. 174.

Доказательство. Так как ограничение формы β на U невырождено, для любого вектора $v \in V$ существует единственный такой вектор $v_U \in U$, что линейная функция $u \mapsto \beta(u, v)$ на пространстве U задаётся правым скалярным умножением векторов из U на этот вектор v_U, т. е. для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$. Поэтому разность $v - v_U \in U^\perp$. Таким образом, каждый вектор $v \in V$ представляется в виде суммы $v = v_U + (v - v_U)$ с $v \in U$ и $v - v_U \in U^\perp$. Поскольку в любом разложения $v = v_U' + w$ с $v_U' \in U$ и $w \in U^\perp$ для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v_U')$, имеем равенство $v_U' = v_U$, а значит и равенство $w = v - v_U' = v - v_U$, что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (13-12) на стр. 174: $v_U = \sum_i \beta({}^\vee u_i, v_U)\, u_i = \sum_i \beta({}^\vee u_i, v)\, u_i$. □

Упражнение 13.9. Докажите симметричное утверждение: $V = {}^\perp U \oplus U$ если и только если билинейная форма β ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму $\beta|_U : U \times U \to \Bbbk$; при этом проекция ${}_U v$ каждого вектора $v \in V$ на U вдоль ${}^\perp U$ однозначно определяется тем, что $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$ для всех $u \in U$ и находится по формуле ${}_U v = \sum \beta\left(v, u_i^\vee\right)\, u_i = \sum \beta\left(v, u_i\right)\, {}^\vee u_i$.

13.4. Симметричные и кососимметричные формы. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(u, w) = \beta(w, u)$ для всех $u, w \in V$, и *кососимметричной* — если $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. В последнем случае для любых $u, w \in V$ выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u)\,,$$

откуда $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$.

Упражнение 13.10. Убедитесь, что при $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ равенство $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ всех $u, w \in V$ равносильно равенству $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$ и что формы $\beta(u, w)$ и $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$ пропорциональны ровно в двух случаях: когда $\beta^t = \pm\beta$.

Если $\operatorname{char} \Bbbk = 2$, каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но не наоборот. Если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма β однозначно раскладывается в сумму $\beta = \beta_+ + \beta_-$ симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}\,.$$

13.4.1. Левая и правая корреляции симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем в этом случае обозначать оператор $\beta^\wedge = {}^\wedge\beta$ через $\widehat{\beta} : V \to V^*$ и называть просто *корреляцией* симметричной формы β. Напомню, корреляция переводит вектор $v \in V$, в линейную функцию

$$\widehat{\beta} v : V \to \Bbbk\,, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u)\,.$$

Для кососимметричной формы левая и правая корреляции различаются знаком: $\beta^\wedge = -{}^\wedge\beta$.

13.4.2. Ядро. Левое и правое ядро (косо)симметричной формы β совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Поэтом для (косо)симметричной формы β пространство $\ker {}^\wedge\beta = \ker \beta^\wedge$ обозначается просто $\ker \beta \overset{\text{def}}{=} \{w \in V \mid \forall\, v \in V\ \beta(v, w) = \pm\beta(w, v) = 0\}$.

Предложение 13.5

Ограничение (косо) симметричной билинейной формы β на любое дополнительное к ядру $\ker \beta$ подпространство $U \subset V$ невырождено.

Доказательство. Пусть подпространство $U \subset V$ таково, что $V = \ker\beta \oplus U$, а вектор $w \in U$ удовлетворяет для всех $u \in U$ соотношению $\beta(u,w) = 0$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$, где $e \in \ker\beta$ и $u \in U$, получаем $\beta(v,w) = \beta(e,w) + \beta(u,w) = 0$, откуда $w \in U \cap \ker\beta = 0$. □

Предложение 13.6
Любая (косо) симметричная билинейная форма β на пространстве V корректно определяет на фактор пространстве $V/\ker\beta$ невырожденную билинейную форму $\overline{\beta}$ по формуле

$$\overline{\beta}([u],[w]) \overset{\text{def}}{=} \beta(u,w)\,. \tag{13-19}$$

Доказательство. Если $[u] = [u']$, а $[w] = [w']$, то векторы $u - u'$ и $w - w'$ лежат в $\ker\beta$ и имеют нулевые левые и правые скалярные произведения с любым вектором. Поэтому

$$\overline{\beta}([u'],[w']) = \beta(u',w') = \beta\big(u + (u'-u), w + (w'-w)\big) = \beta(u,w) = \overline{\beta}([u],[w])\,,$$

что доказывает корректность формулы (13-19). Пусть класс $[u] \in V/\ker\beta$ имеет нулевое скалярное произведение $\overline{\beta}([u],[w]) = 0$ со всеми классами $[w] \in V/\ker\beta$. По определению формы $\overline{\beta}$ это означает, что $\beta(u,w) = 0$ для всех $w \in U$, откуда $u \in \ker\beta$ и $[u] = 0$. □

Предостережение 13.1. Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, левое и правое ядра $\ker({}^{\vee}\beta)$ и $\ker(\beta^{\vee})$ могут быть различны, и в этом случае предл. 13.5 и предл. 13.6, вообще говоря, неверны.

13.4.3. Ортогоналы и проекции. Если форма β на пространстве V (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству $U \subset V$ совпадают друг с другом и обозначаются через $U^{\perp}$. Если (косо) симметричная форма β ограничивается на подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму, то $V = U \oplus U^{\perp}$ по предл. 13.4. В этом случае подпространство $U^{\perp}$ называется *ортогональным дополнением* к подпространству U. Проекция v_U вектора $v \in V$ на U вдоль $U^{\perp}$ называется *ортогональной проекцией* на U относительно формы β. Вектор v_U однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из U такие же, как и у вектора v.

Если форма β невырождена на всём пространстве V, то по предл. 13.4

$$\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U \quad \text{и} \quad U^{\perp\perp} = U$$

для всех подпространств $U \subset V$. В этом случае ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено если и только если невырождено её ограничение на $U^{\perp}$.

Теорема 13.2 (теорема Лагранжа)
Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой β над любым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ обладает базисом с диагональной матрицей Грама[1].

Доказательство. Если $\dim V = 1$ или форма β нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма β ненулевая, то найдётся вектор $e \in V$ с $\beta(e,e) \neq 0$, ибо в противном случае $2\beta(u,w) = \beta(u+w,u+w) - \beta(u,u) - \beta(w,w)) = 0$ для всех $u,w \in V$. Возьмём такой вектор e

[1] Такие базисы называются *ортогональными*.

в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы β на одномерное подпространство $U = \Bbbk \cdot e$ невырождено, пространство V распадается в прямую ортогональную сумму $U \oplus U^{\perp}$. По индукции, в $U^{\perp}$ есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему e, получаем искомый базис в V. □

Следствие 13.1
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор e_i на $e_i / \sqrt{\beta(e_i, e_i)}$. □

Пример 13.6 (ортогональный базис гиперболического пространства)
В гиперболическом пространстве[1] $\Bbbk^{2n}$ с гиперболическим базисом $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ в качестве ортогонального базиса можно взять, например, векторы $p_i = e_i + e_{n+i}$ и $q_i = e_i - e_{n+i}$ со скалярными квадратами $h(p_i, p_i) = 2$ и $h(q_i, q_i) = -2$.

Теорема 13.3 (теорема Дарбу)
Над произвольным полем $\Bbbk$ любой характеристики для каждой кососимметричной билинейной формы ω на конечномерном векторном пространстве V имеется базис с матрицей Грама, ненулевые элементы которой сосредоточены в расположенных на главной диагонали 2×2 блоках вида
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13-20}$$
В частности, $\mathrm{rk}\,\omega$ всегда чётен.

Доказательство. Если форма тождественно нулевая, то доказывать нечего. Если $\omega(u, w) \neq 0$ для каких-то u, w, положим $e_1 = u$, $e_2 = w/\omega(u, w)$. Так как матрица Грама векторов e_1, e_2 имеет вид (13-20), эти векторы не пропорциональны и порождают двумерное подпространство $U \subset V$, на которое форма ω ограничивается невырождено. Поэтому $V = U \oplus U^{\perp}$. Применяя индукцию по $\dim V$, можно считать, что в подпространстве $U^{\perp}$ требуемый базис есть. Добавляя к нему e_1, e_2, получаем искомый базис в V. □

Следствие 13.2
Над произвольным полем $\Bbbk$ любой характеристики всякая невырожденная кососимметричная форма изометрически изоморфна симплектической форме из прим. 13.3 на стр. 174.

Доказательство. Согласно теор. 13.3 все ненулевые элементы матрицы Грама формы в подходящем базисе сосредоточатся в расположенных на главной диагонали 2×2 блоках (13-20). Чтобы получить из такого базиса симплектический, надо лишь переставить базисные векторы: сначала написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными. □

[1] См. прим. 13.2 на стр. 173.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 13.3. Это переформулировка того, что форма $\beta : V \times V \to \Bbbk$ билинейна.

Упр. 13.4. Линейная оболочка векторов $e_\nu + ie_{n+\nu}$ с $1 \leqslant \nu \leqslant n$.

Упр. 13.5. Если матрица $B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ кососимметрична, то при нечётном n

$$\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B = -\det B \,,$$

откуда $\det B = 0$ если $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$.

Упр. 13.6. Пусть $v = \sum x_i e_i$. Скалярно умножая v слева на ${}^\vee e_i$, получаем $\beta({}^\vee e_i, v) = x_i$. Скалярно умножая v справа на $e_i^\vee$, получаем $\beta(v, e_i^\vee) = x_i$, и т. д.

Упр. 13.8. В $\Bbbk[\![x]\!]$ квадрат ряда $\sqrt{1+x}$ равен $1 + x$, а коэффициенты при x^k для $0 \leqslant k \leqslant n$ у квадрата ряда $\sqrt{1+x}$ такие же, как и у квадрата многочлена из условия.