

§12. Выпуклая геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные векторные и аффинные пространства над полем \mathbb{R} .

12.1. Выпуклые фигуры. Барицентрическая комбинация¹ $x_1 p_1 + \dots + x_m p_m$ точек p_i вещественного аффинного пространства \mathbb{A}^n называется *выпуклой*, если все её коэффициенты $x_i \geq 0$. Фигура $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации любых своих точек. Из теоремы о группировании масс² вытекает, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вместе с любыми двумя своими точками a, b она содержала и соединяющий их отрезок $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda a + \mu b \mid \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu > 0\}$. Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ , называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\text{conv } \Phi$. Иначе $\text{conv } \Phi$ можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ : это множество выпукло по [упр. 1.8](#) на стр. 16 и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем фигуру Φ .

12.1.1. Топологическое отступление. Для произвольного вещественного $\varepsilon > 0$ мы называем ε -окрестностью точки $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ правильный куб с центром в p и направленными вдоль стандартных координатных осей рёбрами длины 2ε :

$$B_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i |x_i - p_i| \leq \varepsilon\}. \quad (12-1)$$

Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*³, если вместе с каждой точкой $p \in U$ в U лежит и какая-нибудь её ε -окрестность $B_\varepsilon(p)$. Кубы (12-1) являются шарами радиуса ε относительно *sup-нормы*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{\text{sup}} = \max_i |x_i|.$$

Рассматриваемая нами топология является *метрической топологией*, определяемой при помощи этой нормы. Поскольку все нормы на векторном пространстве \mathbb{R}^n задают одну и ту же топологию, данное выше определение открытого множества не зависит от выбора системы координат, использованной для определения ε -окрестностей.

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. Докажите это непосредственно, без ссылок на курс топологии.

Напомню, что точка p называется *внутренней* точкой фигуры Φ , если она лежит в Φ вместе с некоторой своей ε -окрестностью. Множество внутренних точек фигуры Φ обозначается $\text{int } \Phi$. Внутренние точки дополнения $\mathbb{A}^n \setminus \Phi$ называются *внешними* точками фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$. Точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *граничными*. Множество граничных точек фигуры Φ обозначается $\partial\Phi$. Объединение $\bar{\Phi} = \Phi \cup \partial\Phi$ называется *замыканием* фигуры Φ .

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Покажите, что $p \in \partial\Phi$ если и только если в любой ε -окрестности точки p имеются как точки фигуры Φ , так и точки не лежащие в Φ , и докажите, что замыкание $\bar{\Phi}$ является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим Φ .

Предложение 12.1

Внутренность и замыкание любой выпуклой фигуры выпуклы.

¹См. н° 1.4.2 на стр. 15.

²См. [упр. 1.8](#) на стр. 16.

³Все необходимые нам сведения из курса топологии имеются в лекции:

http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf.

Доказательство. Первое вытекает из того, что если точки a и b содержатся в выпуклом множестве Φ вместе с некоторыми ε -кубами $B_\varepsilon(a), B_\varepsilon(b) \subset \Phi$, то все точки отрезка $[ab]$ содержатся в Φ вместе с такими же ε -кубами, см. рис. 12◊1. Второе — из того, что если $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ и $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$, то при любых фиксированных λ и μ предел $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} a_k + \mu \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lambda a + \mu b$. Таким образом, каждая точка отрезка $[a, b]$ является пределом последовательности точек фигуры Φ , если таковыми являются концы a, b этого отрезка. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является замыканием множества своих внутренних точек, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является замыканием множества своих внутренних точек.

ПРИМЕР 12.1 (СИМПЛЕКСЫ)

Выпуклая оболочка $n + 1$ точек p_0, \dots, p_n , не лежащих в $(n - 1)$ -мерной плоскости, называется n -мерным симплексом с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, \dots, p_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n x_i p_i \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}. \quad (12-2)$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно. В порождённом вершинами симплекса пространстве \mathbb{A}^n , в аффинных координатах (x_1, \dots, x_n) относительно репера с началом в p_0 и базисными векторами $\overline{p_0 p_i}$, где $1 \leq i \leq n$, симплекс (12-2) задаётся системой из $n + 1$ линейных неоднородных неравенств $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1$. Так как в точке с координатами $(1/2n, \dots, 1/2n)$ все эти неравенства выполнены строго, она принадлежит симплексу вместе с некоторым ε -кубом, т. е. каждый n -мерный симплекс в \mathbb{R}^n имеет непустую внутренность.

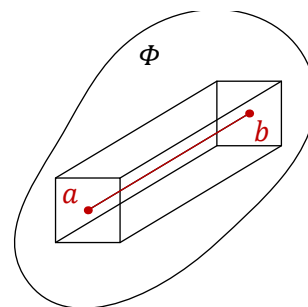


Рис. 12◊1. Выпуклость внутренности.

УПРАЖНЕНИЕ 12.4. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, \dots, p_n]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{v_1}, \dots, p_{v_m}]$, где $m < n$ и $v_i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

ЛЕММА 12.1

Для любого открытого выпуклого множества U в аффинном пространстве размерности $n \geq 2$ через каждую точку $p \notin U$ можно провести не пересекающую U прямую.

Доказательство. Обозначим через C объединение всех открытых лучей

$$]p, u) \stackrel{\text{def}}{=} \{p + t \cdot \overline{pu} \mid u \in U, t > 0\},$$

начинающихся в p и проходящих через всевозможные точки $u \in U$. Из рис. 12◊2 и рис. 12◊3 на стр. 157 очевидно, что C является открытой выпуклой фигурой, и $p \in \partial C$. Так как $U \subset C$, достаточно провести через p прямую, не пересекающую C . Из выпуклости C следует, что любая проходящая через p прямая ℓ либо не пересекает C , либо пересекает C по одному из лучей $]p, u)$, все точки которого являются внутренними точками C , а все остальные отличные от p точки прямой ℓ являются для C внешними, см. рис. 12◊2. В частности, внешние для C точки существуют. Пусть q — одна из них. Поскольку объемлющее аффинное пространство по крайней

мере двумерно, через q можно провести пересекающую C прямую, отличную от прямой (qp) . На ней имеется отличная от p граничная точка r конуса C . Тем самым, $(pr) \cap C = \emptyset$. \square

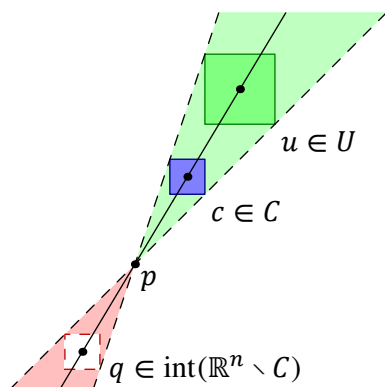


Рис. 12◊2. Открытость C и непустота $\text{int}(\mathbb{A}^n \setminus C)$.

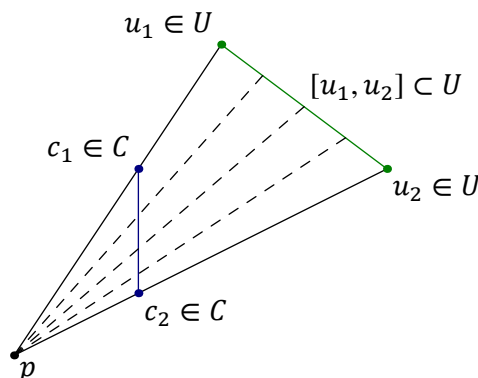


Рис. 12◊3. Выпуклость C .

12.2. Опорные полупространства. Мы называем *аффинными функционалами* на пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ аффинные отображения¹ $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Если произвольно фиксировать начальную точку $c \in \mathbb{A}^n$, то действие такого функционала на точку $p \in \mathbb{A}^n$ задаётся формулой

$$a(p) = a(c) + \alpha(\overline{cp}),$$

которую мы будем коротко записывать в виде $a = a_c + \alpha$, где $a_c = a(c) \in \mathbb{R}$, а дифференциал $\alpha = D_a \in V^*$ не зависит от c . Ограничение аффинного функционала $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на любой отрезок $[p, q] \subset \mathbb{A}^n$ представляет собою «школьную линейную функцию» $a(x) = \alpha x + \beta$ на этом отрезке, и для неё имеются следующие исключаяющие друг друга возможности: она либо тождественно нулевая, либо нигде не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак, либо зануляется ровно в одной точке $z \in [p, q]$. В последнем случае имеется дальнейшая альтернатива: либо точка z является одним из концов отрезка, и функционал a имеет постоянный знак на полуинтервале $[p, q] \setminus z$, либо $z \in (a, b)$, а a имеет постоянные и противоположные друг другу знаки на полуинтервалах $[p, z)$ и $(z, b]$. Таким образом, каждый непостоянный аффинный функционал $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт разбиение аффинного пространства \mathbb{A}^n в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости $H_a = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) = 0\}$ и двух выпуклых открытых полупространств $\text{int} H_a^+ = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) > 0\}$ и $\text{int} H_a^- = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) < 0\}$, которые являются внутренностями двух замкнутых полупространств $H_a^+ = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) \geq 0\}$ и $H_a^- = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) \leq 0\}$ с общей границей $\partial H_a^+ = \partial H_a^- = H_a$. Каждый отрезок $[p, q]$ с $p \in \text{int} H_a^+$ и $q \in \text{int} H_a^-$ пересекает гиперплоскость H_a в единственной точке, и она является внутренней точкой отрезка $[p, q]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1 (ОПОРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, ГИПЕРПЛОСКОСТИ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА)

Аффинный функционал $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *опорным* для фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$, если $H_a \cap \partial \Phi \neq \emptyset$ и $\Phi \subseteq H_a^+$. В этой ситуации гиперплоскость $H_a \subset \mathbb{A}^n$ и замкнутое полупространство H_a^+ тоже называются *опорными* для фигуры Φ .

¹См. н° 2.2 на стр. 24.

ТЕОРЕМА 12.1

Для любых открытого выпуклого множества U и не пересекающегося с ним аффинного подпространства Π в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ существует аффинная гиперплоскость, содержащая Π и не пересекающая U .

Доказательство. Поместим начало координат внутрь Π и отождествим Π с векторным подпространством $W \subset V$ (возможно нулевым). Обозначим через $H \subset V$ какое-нибудь максимальное по включению векторное подпространство, содержащее W и не пересекающее U , а через H' — любое дополнительное к H векторное подпространство. Проекция пространства $V = H \oplus H'$ на H' вдоль H переводит отрезки из $\mathbb{A}(V)$ в отрезки или точки из $\mathbb{A}(H')$, а кубы из $\mathbb{A}(V)$ со сторонами, направленными вдоль базисных векторов любого базиса в V , согласованного с разбиением $V = H \oplus H'$, — в аналогичные кубы в $\mathbb{A}(H')$. Поэтому множество U спроектируется в открытое выпуклое множество $U' \subset \mathbb{A}(H')$, не содержащее нуля, поскольку ядро проекции H не пересекается с U . Если $\dim H' > 1$, то по лем. 12.1 в H' найдётся одномерное подпространство L , не пересекающее U' . Но тогда подпространство $H \oplus L \subset V$ не пересекает U и строго больше, чем H , вопреки выбору H . Поэтому $\dim H' = 1$ и H является искомой гиперплоскостью. \square

ТЕОРЕМА 12.2

Через каждую граничную точку p любой выпуклой фигуры Φ можно провести опорную гиперплоскость (возможно, не единственную).

Доказательство. Если фигура $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ целиком лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то эта гиперплоскость и будет опорной. Если же в Φ есть $n + 1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то $\text{int } \Phi \neq \emptyset$ согласно прим. 12.1 на стр. 156. Проведём через p гиперплоскость H_a , не пересекающую $\text{int } \Phi$. Функционал a имеет на $\text{int } \Phi$ постоянный знак, так как в противном случае, соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из $H_a \cap \text{int } \Phi$. Меняя, если нужно, знак у a , мы можем считать, что $\text{int } \Phi \subset \text{int } H_a^+$. Поскольку Φ лежит в замыкании своей внутреннейности $\text{int } \Phi$, которое в свою очередь содержится в замкнутом полупространстве H_a^+ , мы заключаем, что $\Phi \subset H_a^+$. \square

ТЕОРЕМА 12.3

Всякое замкнутое выпуклое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего Z , мы можем считать, что Z не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка $q \notin Z$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества Z . Для этого соединим q отрезком $[q, p]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \text{int } Z$ и проведём опорное полупространство H_a^+ к Z в граничной точке $r \in [q, p] \cap \partial Z$. Поскольку r лежит строго внутри $[q, p]$, из $a(p) > 0$ и $a(r) = 0$ следует, что $a(q) < 0$, т. е. $q \notin H_a^+$. \square

12.3. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ . Каждая грань фигуры Φ тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани

фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ строго меньше n . Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с произвольными выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры на рис. 12◊4, где пара отрезков гладко сопрягается с овалами, есть две одномерных грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры Φ может не быть гранью самой фигуры Φ .

Точка $p \in \Phi$ называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры Φ , если она не является внутренней точкой никакого отрезка $[a, b] \subset \Phi$. Крайняя точка не может быть внутренней точкой никакой замкнутой выпуклой фигуры, отличной от точки. Если же точка q является внутренней точкой какого-либо отрезка $[a, b] \subset \Phi$, то она может оказаться в грани фигуры Φ только если весь отрезок $[a, b]$ лежит в этой грани, поскольку в противном случае высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным. Таким образом, крайние точки суть последние, нульмерные элементы всевозможных цепочек вида: фигура Φ , грань фигуры Φ , грань грани фигуры Φ , грань грани грани фигуры Φ и т. д., при условии, что такая цепочка действительно заканчивается нульмерной фигурой. В частности, все вершины фигуры Φ являются её крайними точками. Обратите внимание, что крайние точки всех граней замкнутой выпуклой фигуры Φ являются крайними и для Φ , хотя при этом они могут не быть вершинами фигуры Φ .



Рис. 12◊4.

ТЕОРЕМА 12.4

Каждая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности фигуры. Любая внутренняя точка фигуры является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого из фигуры произвольной проходящей через точку прямой. Эти концы лежат на гранях фигуры и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Последние являются крайними точками и для самой фигуры. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2 (цилиндры)

Замкнутая выпуклая фигура вида $\Phi = \mathbb{A}(U) \times B \subset \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$, где $\dim U > 0$, а $B \subset \mathbb{A}(W)$ — непустая замкнутая выпуклая фигура, не содержащая аффинных подпространств положительной размерности, называется *цилиндром с основанием B и образующей $\mathbb{A}(U)$* . Если основание B состоит из одной точки, цилиндр совпадает со своей образующей $\mathbb{A}(U)$ и является аффинным пространством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2

Через каждую точку p любой замкнутой выпуклой фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$ проходит единственное максимальное по включению аффинное подпространство, целиком содержащееся в Φ . Все такие подпространства имеют одно и то же направляющее векторное пространство $U \subset V$. Если $U \neq 0$, то для любого дополнительного¹ векторного подпространства $U' \subset V$ замкнутая выпук-

¹Т. е. такого, что $U \oplus U' = V$.

лая фигура $\Phi' = \Phi \cap (p + U')$ не содержит аффинных пространств положительной размерности, и $\Phi = \mathbb{A}(U) \times \Phi'$ является цилиндром с основанием Φ' с образующей $\mathbb{A}(U)$.

Доказательство. Если аффинные подпространства $p + W_1$ и $p + W_2$ содержатся в Φ , то Φ содержит и аффинное подпространство $p + (W_1 + W_2)$, т. к. для любых $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$ точка $p + w_1 + w_2$ является серединой отрезка с концами в точках $p + 2w_1$ и $p + 2w_2$. Поэтому аффинное пространство $p + U$, где $U \subset V$ это сумма всех таких подпространств $W \subset V$, что $p + W \subset \Phi$, содержит все лежащие в Φ аффинные подпространства, проходящие через p . Если $q + W$ это максимальное содержащееся в Φ аффинное подпространство, проходящее через точку $q \notin p + U$, то $U \subset W$, так как для любого вектора $u \in U$ точка $r = q + u$ является концом содержащегося в Φ интервала $[p, r[= \{(1-t)p + tr \mid 0 \leq t < 1\}$ (см. рис. 12◊5), ибо для каждого $t \in [0, 1)$

$$(1-t)p + t(q+u) = (1-t)\left(p + \frac{t}{1-t}u\right) + tq \in \Phi.$$

По той же причине $W \subset U$. Это доказывает первые два утверждения и первую половину третьего. Прямое разложение $V = U \oplus U'$ задаёт разложение $\mathbb{A}(V) = (p + U) \times (p + U')$, в котором $p + U \subset \Phi$. Для любой точки $q = p + u + u' \in \Phi$ точка $p + u' = q - u \in q + U$ лежит в $(p + U') \cap \Phi = \Phi'$. Наоборот, для любой точки $p + u' \in \Phi' \subset \Phi$ всё аффинное пространство $p + u' + U \subset \Phi$. Поэтому $\Phi \subset (p + U) \times \Phi'$. \square

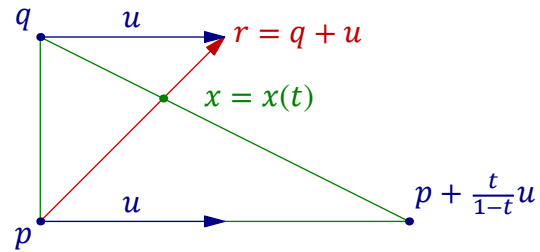


Рис. 12◊5. $\overline{px} : \overline{xr} = t : (1-t)$.

Следствие 12.1

Следующие свойства непустой замкнутой выпуклой фигуры Φ эквивалентны друг другу:

- 1) Φ является цилиндром
- 2) Φ не имеет крайних точек
- 3) Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2). Если Φ цилиндр, то через любую точку $p \in \Phi$ проходит содержащееся в Φ аффинное пространство положительной размерности. Поэтому никакая точка $p \in \Phi$ не может быть крайней.

Импликация (2) \Rightarrow (3). Если фигура Φ не совпадает с наименьшим аффинным подпространством, в котором она содержится, то в этом подпространстве у Φ есть опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем $\dim \Phi$. Заменяя Φ на эту грань и повторяя рассуждение, мы построим цепочку вида: фигура Φ , грань фигуры Φ , грань грани фигуры Φ , и т. д., последний элемент в которой совпадает с наименьшим содержащим его аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то она крайняя. Если нет, то Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Импликация (3) \Rightarrow (1) вытекает из предл. 12.2. \square

12.4. Выпуклые многогранники. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств

$$M = H_{a_1}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+, \quad (12-3)$$

заданных в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ аффинными функционалами $a_1, \dots, a_m : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$, называется *выпуклым многогранником*. В координатном пространстве \mathbb{R}^n многогранник (12-3), заданный функционалами $a_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + b_i$, где $1 \leq i \leq m$, представляет собою множество всех решений системы линейных неоднородных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \geq 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0, \end{cases} \quad (12-4)$$

которую в матричных обозначениях можно коротко записать в виде $Ax + b \geq 0$, где столбец переменных $x \in \mathbb{R}^n$, столбец констант $b \in \mathbb{R}^m$, а $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Пересечение конечного множества выпуклых многогранников является выпуклым многогранником. В частности, выпуклыми многогранниками являются аффинные гиперплоскости $H_a = H_a^+ \cap H_a^- = H_a^+ \cap H_{-a}^+$, представляющие собою пересечения аффинных полупространств, и вообще все аффинные подпространства, включая пустое множество. Удобно считать выпуклым многогранником и всё пространство — множество решений неравенства $1 \geq 0$. Мы будем называть этот многогранник *несобственным*, а все остальные многогранники (12-3) — *собственными*. Все сечения выпуклых многогранников аффинными подпространствами являются выпуклыми многогранниками. Под *размерностью* выпуклого многогранника мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится.

12.4.1. Перечисление граней. Каждый непустой собственный многогранник M имеет грани, и все они тоже являются многогранниками. Сам многогранник M является своей гранью если и только если он содержится в некоторой гиперплоскости. В этом случае мы будем называть совпадающую с M грань *несобственной*, а все остальные грани $\Gamma \subsetneq M$ — *собственными*. Размерность каждой собственной грани строго меньше размерности многогранника. Грани $\Gamma \subset M$ размерности $\dim \Gamma = \dim M - 1$ называются *гипергранями*.

Для многогранника (12-3) и непустого подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ обозначим через $H_I \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i \in I} H_{a_i}$ аффинное подпространство (возможно пустое), задаваемое системой линейных уравнений, получающейся из (12-4) выкидыванием части неравенств и заменой всех оставшихся неравенств на равенства. Для каждой грани $\Gamma = H_b \cap M$, высекаемой из многогранника M каким-либо опорным функционалом $b : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$, обозначаем через $I(\Gamma) = \{i \mid \Gamma \subset H_{a_i}\}$ номера тех функционалов a_i в (12-3), которые тождественно зануляются на Γ . Таким образом, $\Gamma \subset H_{I(\Gamma)}$ и каждый функционал a_j с $j \notin I(\Gamma)$ положителен в какой-нибудь точке грани Γ .

ТЕОРЕМА 12.5 (ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ГРАНЕЙ)

Для каждой грани $\Gamma \subset M$ аффинное подпространство $H_{I(\Gamma)}$ является наименьшим по включению аффинным пространством, содержащим грань Γ . Точка $p \in \Gamma$ является внутренней точкой грани Γ если и только если $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$. Для каждого непустого подмножества $I \subset \{1, \dots, m\}$ пересечение $\Gamma_I \stackrel{\text{def}}{=} M \cap H_I$ либо пусто, либо является гранью M , и все собственные грани многогранника M получают таким образом.

Доказательство. Сначала докажем первые два утверждения. Рассмотрим произвольную грань $\Gamma = M \cap H_b$, высекаемую из M каким-либо опорным функционалом b . Пусть точка $p \in \Gamma$ такова, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$. Тогда эти строгие неравенства выполняются и на некоторой кубической окрестности C точки p в аффинном пространстве $H_{I(\Gamma)}$. Покажем, что вся эта окрестность содержится в грани Γ , т. е. лежит и в M , и в H_b . Первое очевидно, второе вытекает из того, что если $b(q) > 0$ в некоторой точке $q \in C$, то продолжая отрезок $[q, p]$ за точку p , мы получим точку $r \in C$, в которой $b(r) < 0$, что невозможно, ибо $C \subset M$ и функционал b на M неотрицателен. Итак, если точка $p \in \Gamma$ такова, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$, то подпространство $H_{I(\Gamma)}$ является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань Γ , а точка p является внутренней точкой грани Γ .

Заметим теперь, что точка $p \in \Gamma$, в которой $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$ обязательно существует, так как для каждого $j \notin I(\Gamma)$ есть точка $p_j \in \Gamma$, в которой $a_j(p_j) > 0$, и в качестве p можно взять равновесный барицентр этих точек p_j . Это доказывает первое утверждение теоремы. Для доказательства второго утверждения остаётся проверить, что если хоть один функционал a_j с $j \notin I(\Gamma)$ зануляется в некоторой точке $p \in \Gamma$, то точка p не может быть внутренней точкой грани Γ . Для этого рассмотрим такую точку $q \in \Gamma$, в которой $a_j(q) > 0$. Если бы точка p содержалась в Γ вместе с некоторой своей кубической окрестностью в пространстве $H_{I(\Gamma)}$, то мы могли бы немного продлить отрезок $[q, p]$ за точку p внутри этой окрестности и получить в Γ точку r с $a_j(r) < 0$, что невозможно.

Теперь рассмотрим произвольное непустое подмножество $I \subset \{1, \dots, m\}$. Если многогранник $\Gamma_I = M \cap H_I$ не пуст, то сумма $a_I = \sum_{i \in I} a_i$ является опорным функционалом для M и $\Gamma_I = M \cap H_{a_I}$. Поэтому все непустые многогранники Γ_I являются гранями многогранника M . Покажем, что каждая собственная грань $\Gamma = H_b \cap M$, высекаемая из M произвольным опорным функционалом b , имеет вид $\Gamma = \Gamma_I = M \cap H_I$ для множества индексов $I = I(\Gamma) = \{i \mid \Gamma \subset H_{a_i}\}$. Сначала убедимся, что $I(\Gamma) \neq \emptyset$. Как мы видели в предыдущем абзаце, в грани Γ имеется такая точка $p \in \Gamma$, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$. Если бы множество $I(\Gamma)$ было пусто, то в такой точке p были бы положительны сразу все задающие многогранник M функционалы a_i , а значит, они остались бы положительными и на некоторой кубической окрестности точки p во всём пространстве $A(V)$. Тем самым, точка p была бы внутренней точкой M и не могла бы лежать ни в какой собственной грани. Мы заключаем, что $I = I(\Gamma) \neq \emptyset$ и $\Gamma \subseteq H_I \cap M = \Gamma_I$. Остаётся доказать обратное включение $\Gamma_I \subseteq \Gamma$. Для этого рассмотрим произвольную точку $q \in \Gamma_I$ и любую такую точку $p \in \Gamma$, в которой $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$. Тогда точка p лежит внутри грани Γ вместе с некоторой своей кубической окрестностью в пространстве H_I , и отрезок $[q, p]$ можно немного продлить за точку p так, чтобы его новый конец r всё ещё лежал в Γ . Из соотношений $b(p) = 0$ и $b(r) = 0$ вытекает, что $b(q) = 0$. Следовательно, каждая точка $q \in \Gamma_I$ лежит в грани Γ . \square

Следствие 12.2

Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, и каждая грань любой грани является гранью самого многогранника. \square

Следствие 12.3

Крайними точками любого выпуклого многогранника являются его вершины и только они. \square

Следствие 12.4

Каждый ограниченный выпуклый многогранник имеет конечное множество вершин и совпадает с их выпуклой оболочкой. \square

Следствие 12.5

Непустой выпуклый многогранник M тогда и только тогда является цилиндром¹, когда он не имеет вершин. \square

12.5. Выпуклые многогранные конусы. Каждое непустое конечное подмножество $R \subset V$ задаёт в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ замкнутую выпуклую фигуру

$$\sigma_R = \{ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, w_i \in R \subset V \}, \quad (12-5)$$

которая называется *выпуклым многогранным конусом* с множеством образующих R .

Упражнение 12.5. Убедитесь, что σ_R действительно является замкнутой выпуклой фигурой.

Каждый конус (12-5) не пуст, поскольку содержит нулевой вектор $0 \in V$. Вместе с каждым ненулевым вектором $v \in \sigma_R$ в конусе $\sigma_{\mathbb{R}}$ лежат и все неотрицательные кратные этого вектора, т. е. замкнутый луч $[0, v) = \mathbb{R}_{\geq 0} v$. Поэтому любая опорная гиперплоскость H_α конуса σ проходит через нуль: в противном случае из неравенства $a(0) > 0$ и равенства $a(v) = 0$, которое должно выполняться в некоторой точке $v \in H_\alpha \cap \sigma_R \neq \emptyset$, вытекало бы, что $a(w) < 0$ для всех $w \in [0, v) \setminus [0, v]$. Таким образом, все опорные гиперплоскости любого конуса являются *векторными* подпространствами в V и имеют вид H_α для некоторого *линейного* функционала $\alpha \in V^*$. Будучи замкнутой выпуклой фигурой, каждый конус σ_R является пересечением своих опорных полупространств $H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}$, по всем таким $\alpha \in V^*$, что $\alpha(w) \geq 0$ для всех $w \in \sigma_R$ и $H_\alpha \cap \sigma_R \neq \emptyset$. Поэтому для любого вектора $u \notin \sigma_R$ найдётся такой ковектор $\alpha \in V^*$, что $\alpha(u) < 0$, но $\alpha(w) \geq 0$ для всех $w \in \sigma_R$. Это наблюдение известно как *лемма Фаркаша*.

ТЕОРЕМА 12.6 (ТЕОРЕМА ФАРКАША – МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Подмножество $\sigma \subset V$ тогда и только тогда является выпуклым многогранным конусом, когда оно является пересечением конечного числа векторных полупространств

$$H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}, \quad \text{где } \alpha \in V^*. \quad (12-6)$$

В частности, каждый выпуклый многогранный конус является выпуклым многогранником.

Доказательство. Пусть подмножество $\sigma \subset V$ является пересечением конечного числа векторных полупространств (12-6). Тогда σ является выпуклым многогранником в $\mathbb{A}(V)$, содержит нуль $0 \in V$, и вместе с каждой точкой $p \neq 0$ содержит весь замкнутый луч $[0, p)$. Пересечение многогранника σ со стандартным единичным кубом $B_1(0) \subset \mathbb{A}(V)$ с центром в нуле является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 12.4 совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин, которые образуют конечное множество $R \subset \sigma$. Так как для каждого $v \in \sigma$ существует такое $\lambda \geq 0$, что $\lambda v \in \sigma \cap B_1(0)$ является выпуклой комбинацией векторов из R , сам вектор v является неотрицательной линейной комбинацией векторов из R , т. е. $\sigma = \sigma_R$.

Наоборот, любой многогранный конус $\sigma_R \subset V$, как мы видели, является пересечением опорных полупространств вида (12-6). Для того, чтобы неравенство $\alpha(w) \geq 0$ выполнялось для всех $w \in \sigma_R$, достаточно, чтобы оно выполнялось для всех $w \in R$. Поэтому множество всех таких ковекторов $\alpha \in V^*$, что $\sigma_R \subset H_\alpha^+$ представляет собою пересечение конечного числа векторных полупространств $H_w^+ = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(w) \geq 0\}$, задаваемых векторами $w \in R$, рассматриваемыми как линейные функционалы на V^* . По уже доказанному, такое пересечение является выпуклым многогранным конусом $\sigma_{R^\vee} \subset V^*$, порождённым конечным множеством ковекторов $R^\vee \subset V^*$.

¹См. *опр. 12.2* на стр. 159. Являющиеся цилиндрами многогранники также называют *призмами*.

Так как каждый ковектор $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$ является неотрицательной линейной комбинацией ковекторов $\psi \in R^\vee$, все неравенства $\alpha(v) \geq 0$, где $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$, следуют из конечного набора неравенств $\psi(v) \geq 0$, где $\psi \in R^\vee$, т. е. $\sigma = \bigcap_{\psi \in R^\vee} H_\psi^+$. \square

12.5.1. Двойственные конусы. Множество линейных функционалов $\alpha \in V^*$, принимающих неотрицательные значения на выпуклом многогранном конусе $\sigma_R \subset V$, является пересечением конечного числа векторных полупространств $H_w^+ \subset V^*$, задаваемых образующими $w \in R$ конуса σ_R , рассматриваемыми как линейные функционалы на V^* , и по теор. 12.6 представляет собою выпуклый многогранный конус

$$\sigma_R^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \in V^* \mid \forall v \in \sigma_R \alpha(v) \geq 0 \} = \bigcap_{w \in R} H_w^+ \subset V^*,$$

порождённый конечным набором ковекторов, который мы обозначим через $R^\vee \subset V^*$. Конус $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ называется *двойственным* к конусу $\sigma_R \subset V$. По лемме Фаркаша исходный конус

$$\sigma_R = \{ v \in V \mid \forall \alpha \in \sigma_{R^\vee} \alpha(v) \geq 0 \} = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} \alpha^+ \subset V$$

двойствен к своему двойственному конусу. Таким образом, для любого выпуклого многогранного конуса σ выполняется равенство $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$. Множество $R^\vee \subset V^*$ образующих двойственного к σ_R конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$ состоит из таких ковекторов $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$, что конус $\sigma_R = H_{\alpha_1}^+ \cap \dots \cap H_{\alpha_m}^+$.

12.5.2. Проективный и асимптотический конусы многогранника. Вложим \mathbb{R}^n со стандартными базисом e_1, \dots, e_n и координатами (x_1, \dots, x_n) в этом базисе в $(n + 1)$ -мерное пространство $W = \mathbb{R}^{n+1}$ с базисом e_0, e_1, \dots, e_n и координатами (x_0, x_1, \dots, x_n) в качестве векторного подпространства $V \subset W$, задаваемого уравнением $x_0 = 0$, и обозначим через $U = e_0 + V$ аффинную гиперплоскость, заданную уравнением $x_0 = 1$. Каждый выпуклый многогранник $M = H_{\alpha_1}^+ \cap \dots \cap H_{\alpha_m}^+ \subset \mathbb{R}^n$, задаваемый неоднородными неравенствами на (x_1, \dots, x_n) :

$$b_i + \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m, \tag{12-7}$$

является пересечением аффинной гиперплоскости U с выпуклым многогранным конусом $\bar{M} \subset W = \mathbb{R}^{n+1}$, который задаётся однородными неравенствами на (x_0, x_1, \dots, x_n) :

$$b_0x_0 + \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m, \tag{12-8}$$

см. рис. 12◊6. Конус \bar{M} называется *проективным конусом* многогранника M . Его пересечение с векторным подпространством $V \subset W$, которое задаётся уравнением $x_0 = 0$ и является направляющим векторным подпространством аффинной гиперплоскости $U = e_0 + V \subset W$, называется *асимптотическим конусом* или *конусом рецессии* многогранника M и обозначается $M_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bar{M} \cap V$. Конус M_∞ описывается в векторном пространстве $V = \mathbb{R}^n$ однородными неравенствами

$$\alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m,$$

в которые превращаются неравенства (12-8) при $x_0 = 0$ и которые получаются удалением свободных членов из неоднородных неравенств (12-7). Таким образом, асимптотический конус $M_\infty = \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee$ двойствен конусу $\sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \subset V^*$, порождённому дифференциалами $\alpha_i = D_{\alpha_i}$ аффинных функционалов α_i , задающих многогранник M .

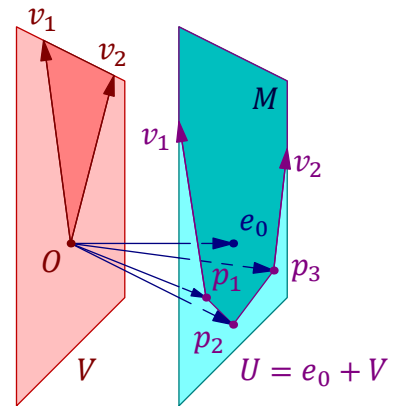


Рис. 12◊6. Конус \bar{M} .

Геометрически, проективный конус \overline{M} непустого многогранника M является замыканием объединения всех лучей $[0, w)$, где $w \in M$, а асимптотический конус M_∞ образован пределами

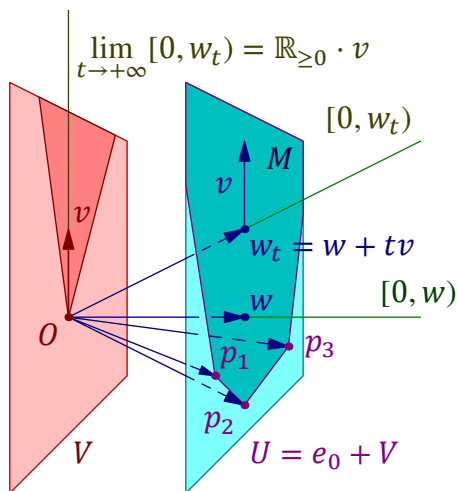


Рис. 12◊7. Конус M_∞ .

$[0, v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [0, w_t)$ таких лучей, проходящих через переменную точку $w_t = w + tv \in M$, которая стартует при $t = 0$ из некоторой точки $w \in M$ и уходит при $t \rightarrow +\infty$ на бесконечность в направлении вектора $v \in V$, оставаясь всё время внутри M , см. рис. 12◊7.

УПРАЖНЕНИЕ 12.6. Убедитесь в этом и покажите, что асимптотический конус M_∞ непустого многогранника M состоит из всех тех векторов $v \in V$, которые обладают следующими эквивалентными свойствами¹: (1) для любой точки $p \in M$ точка $p + v$ тоже лежит в M (2) для любой точки $p \in M$ луч $\{p + tv \mid t \geq 0\}$ содержится в M (3) M содержит какой-нибудь луч $[p, q)$ с направляющим вектором $\overline{pq} = v$.

ТЕОРЕМА 12.7 (ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Выпуклая оболочка любого конечного набора точек в \mathbb{R}^n является ограниченным выпуклым многогранником. Наоборот, всякий компактный выпуклый многогранник в \mathbb{R}^n является выпуклой оболочкой конечного множества точек, а именно — своих вершин.

Доказательство. Последнее утверждение уже было установлено нами в сл. 12.4 на стр. 162. Докажем первое. Вложим \mathbb{R}^n в векторное пространство $W = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}^n$ в качестве аффинной гиперплоскости U с уравнением $x_0 = 1$, как это объяснялось выше. Выпуклая оболочка любого конечного множества $P \subset U$ ограничена, так как содержится в любом содержащем P кубе, и высекается из аффинной гиперплоскости U конусом $\sigma_P \subset W$, поскольку каждая выпуклая барицентрическая комбинация $\sum x_i p_i$ точек $p_i \in P$ лежит в конусе σ_P , и наоборот, для любого ненулевого вектора $w = \sum \lambda_i p_i \in \sigma_P$ пересечение луча $[0, w)$ с аффинной гиперплоскостью $x_0 = 1$ происходит в точке $w/x_0(w) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^{-1} \sum \lambda_i p_i$, которая является выпуклой барицентрической комбинацией точек p_i , так как все $\lambda_i \geq 0$. По теор. 12.6 конус σ_P является выпуклым многогранником. Поэтому $M = \sigma_P \cap U$ тоже является выпуклым многогранником. \square

ТЕОРЕМА 12.8 (РАЗЛОЖЕНИЕ МОЦКИНА)

Всякий выпуклый многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ раскладывается в сумму

$$M = \text{conv } P + M_\infty = \{p + v \mid p \in \text{conv } P, v \in M_\infty\},$$

где $P \subset M$ — некоторое конечное подмножество, а $M_\infty = \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee \subset V$ — асимптотический конус многогранника M . Иначе говоря, каждый выпуклый многогранник является объединением семейства своих асимптотических конусов, отложенных от точек некоторого компактного выпуклого многогранника (возможно, пустого или состоящего из одной точки).

Доказательство. Как и выше, отождествим \mathbb{R}^n с аффинной гиперплоскостью U , которая задаётся в $(n + 1)$ -мерном пространстве $W = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}^n$ уравнением $x_0 = 1$, и обозначим через $V \subset W$

¹Направления таких векторов v называют асимптотическими или направлениями рецессии.

направляющее векторное подпространство гиперплоскости U , которое задаётся в W уравнением $x_0 = 0$. По теор. 12.6 на стр. 163 проективный конус $\bar{M} = \sigma_S$ порождается некоторым конечным множеством векторов $S \subset W$. Высекаемая векторным подпространством $V \subset W$ грань $M_\infty = V \cap \bar{M}$ проективного конуса \bar{M} , будучи пересечением конусов с общей вершиной, также представляет собою конус $\sigma_R \subset V$, порождённый некоторым конечным множеством векторов $R = S \cap V$. Умножая все не лежащие в V образующие проективного конуса \bar{M} на положительные константы, мы можем и будем считать, что все они лежат в U , а значит, и в M . Обозначим множество таких образующих через $P \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus R \subset M \subset U$. Тогда $\bar{M} = \sigma_{P \sqcup R} = \{p+r, \mid p \in \sigma_P, r \in \sigma_R\}$. Луч $[0, p+r)$, где $p \in \sigma_P, r \in \sigma_R$, пересекает аффинную гиперплоскость U если и только если $p \neq 0$, и в этом случае точка пересечения $(p+r)/x_0(p+r) = (p+r)/x_0(p)$ является суммой точки $p/x_0(p) \in \text{conv } P$ и вектора $r/x_0(p) \in \sigma_R = M_\infty$. \square

Следствие 12.6

Следующие свойства непустого многогранника $M = H_{\alpha_1}^+ \cap \dots \cap H_{\alpha_m}^+$, задаваемого аффинными функционалами $\alpha_i = b_i + \alpha_i$ эквивалентны:

$$M \text{ ограничен} \iff \text{конус } M_\infty = 0 \iff \text{конус } \sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = V^*.$$

\square

12.5.3. Коасимптотический конус многогранника. Выпуклый многогранник

$$M = H_{\alpha_1}^+ \cap \dots \cap H_{\alpha_m}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b + Av \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (12-9)$$

является прообразом положительного гипероктанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \subset \mathbb{R}^m$ при аффинном отображении¹

$$a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax + b,$$

с дифференциалом $D_a = A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$. Двойственное к дифференциалу линейное отображение² $D_a^* = D_a^*: \mathbb{R}^{m*} \rightarrow \mathbb{R}^{n*}, y \mapsto yA$, переводит стандартные базисные ковекторы $e_i^* \in \mathbb{R}^{m*}$ в линейные функционалы $\alpha_i = D_{\alpha_i}$, координатами которых в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^{n*} являются строки матрицы A . Ядро $\ker D_a^* = \{y \in \mathbb{R}^{m*} \mid yA = 0\} = \text{Ann im } D_a$ состоит из всех линейных соотношений между функционалами³ α_i или, что то же самое, между строками матрицы A . Пересечение ядра $\ker D_a^*$ с положительным координатным гипероктантом в \mathbb{R}^{m*} называется коасимптотическим конусом многогранника M и обозначается

$$\kappa_M \stackrel{\text{def}}{=} \ker D_a^* \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{m*}.$$

Он зависит только от линейного отображения $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, но не от вектора $b \in \mathbb{R}^m$.

Отметим, что при замене вектора $b \in \mathbb{R}^m$ лежащим в том же классе по модулю векторного подпространства $\text{im } D_a \subset \mathbb{R}^m$ вектором $b' = b + Av$, где $v \in \mathbb{R}^n$, многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ параллельно сдвигается на вектор $-v$, ибо $Ax + b' \geq 0 \iff A(x+v) + b \geq 0$. Поэтому многогранник M с точностью до сдвига зависит только от класса $[b]_A = b + \text{im } D_a \in \mathbb{R}^m / \text{im } D_a$ вектора b по модулю линейной оболочки столбцов матрицы A . По сл. 7.5 на стр. 90 фактор пространство $\mathbb{R}^m / \text{im } D_a = \mathbb{R}^m / \text{Ann ker } D_a^*$ канонически двойственно пространству $\ker D_a^*$. Таким образом, класс $[b]_A$ задаёт линейный функционал $[b]_A: \ker D_a^* \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto yb$.

¹Мы придерживаемся матричных обозначений, введённых после форм. (12-4) на стр. 161.

²См. п. 7.3 на стр. 88.

³В том смысле, что строка $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m*}$ лежит в $\ker D_a^*$ если и только если в \mathbb{R}^{n*} выполняется равенство $y_1 \alpha_1 + \dots + y_m \alpha_m = 0$.

Предложение 12.3

Двойственный к коасимптотическому конус $\mathcal{K}_M^\vee \subset \mathbb{R}^m / \text{im } D_a$ образован всеми такими классами $[b]_A \in \mathbb{R}^m / \text{im } D_a = (\ker D_a^*)^*$, что многогранник $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b + Ax \geq 0\}$ не пуст.

Доказательство. Условие $M \neq \emptyset$ равносильно тому, что класс $[b]_A = \{Ax + b \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ имеет непустое пересечение с положительным гипероктантом $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$, что в свою очередь равносильно тому, что класс $[b]_A$ содержится в объединении классов $[w]_A = w + \text{im } D_a$ по всем $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$. Такое объединение представляет собою выпуклый многогранный конус в пространстве $\mathbb{R}^m / \text{im } D_a$ — образ положительного гипероктанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ при линейной сюръекции $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m / \text{im } D_a$. Он натянут на классы $[e_i]_A$ стандартных базисных векторов $e_i \in \mathbb{R}^m$. Двойственный к нему конус в пространстве $\text{Ann im } D_a = (\mathbb{R}^m / \text{im } D_a)^*$ состоит из ковекторов, принимающих неотрицательные значения на всех базисных векторах e_i , т. е. из таких строк $y \in \mathbb{R}^{m*}$, что $yA = 0$ и все $y_i \geq 0$, а это и есть коасимптотический конус. \square

Замечание 12.1. На языке линейных неравенств [предл. 12.3](#) формулируется следующим образом: система неоднородных линейных неравенств $Ax + b \geq 0$ имеет решение если и только если $yb \geq 0$ для всех лежащих в $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ решений системы однородных линейных уравнений $yA = 0$.

Упражнение 12.7. Покажите, что система однородных линейных уравнений $yA = 0$ тогда и только тогда имеет ненулевое решение $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, когда при некотором $b \in \mathbb{R}^m$ система неоднородных линейных неравенств $Ax + b \geq 0$ не имеет решений.

12.5.4. Грани двойственных конусов. Условимся, что помимо собственных граней, отсекаемых из конуса его опорными гиперплоскостями H_α , где $\alpha \in V^*$, у каждого конуса $\sigma \subset V$ имеется также и *несобственная* грань $\sigma = V \cap \sigma$ размерности $\dim \sigma$, отсекаемая нулевым ковектором $0 \in V^*$. Для каждой грани $\Gamma \subset \sigma_R$ обозначим через $L(\Gamma) \subset V$ её линейную оболочку.

Предложение 12.4

Каждая грань Γ конуса σ_R является конусом, порождённым множеством $R \cap \Gamma$ лежащих в этой грани образующих конуса σ_R , причём это множество линейно порождает векторное пространство $L(\Gamma)$.

Доказательство. По [теор. 12.5](#) на стр. 161 каждая грань Γ конуса σ_R представляет собою пересечение $\Gamma = \sigma_R \cap L(\Gamma)$ и, тем самым, тоже является конусом. Достаточно убедиться, что в представлении каждого вектора $v \in \Gamma$ в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из R ненулевые коэффициенты могут иметь лишь образующие $w \in R \cap \Gamma$. Для этого представим конус σ_R в виде пересечения $\sigma_R = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} H_\alpha^+$ полупространств, заданных конечным набором ковекторов $R^\vee \subset V^*$, и обозначим через $R^\vee(\Gamma) = R^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$ множество всех тех ковекторов $\alpha \in R^\vee$, которые тождественно зануляются на грани Γ . Тогда по той же [теор. 12.5](#) $L(\Gamma) = \text{Ann } R^\vee(\Gamma)$. Тем самым, для каждой образующей $w' \in R \setminus \Gamma = R \setminus L(\Gamma)$ найдётся такой функционал $\alpha \in R^\vee(\Gamma)$, что $\alpha(w') > 0$. Если бы образующая w' входила с положительным коэффициентом в разложение какого-нибудь вектора $v \in \Gamma$, то значение $\alpha(v)$ было бы строго положительным, что невозможно, поскольку α аннулирует грань Γ . \square

Упражнение 12.8. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество $I \subset R$ порождает конус, являющийся гранью конуса σ_R .

Предложение 12.5 (двойственность между гранями двойственных конусов)

Для любой пары двойственных конусов $\sigma_R \subset V$ и $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ при всех $0 \leq k \leq \dim \sigma$ имеется оборачивающая включения биекция между k -мерными гранями конуса σ_R и $(\dim V - k)$ -мерными гранями конуса σ_R^\vee , переводящая каждую грань Γ конуса σ в пересечение $\sigma^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$ двойственного конуса с аннулятором грани Γ . В частности, одномерные рёбра каждого из конусов являются уравнениями $(n - 1)$ -мерных граней двойственного конуса и наоборот.

Доказательство. Каждая образующая $w \in R \cap \Gamma$ любой грани $\Gamma = \sigma_{R \cap \Gamma}$ конуса σ_R является опорным функционалом для двойственного конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$. Поэтому по теор. 12.5 на стр. 161 подпространство $\text{Ann } \Gamma = \text{Ann}(R \cap \Gamma) \subset V^*$ высекает из двойственного конуса σ_R^\vee некоторую грань. Обозначим её $\Gamma^\vee = \sigma_{R^\vee} \cap \text{Ann } \Gamma$. По предл. 12.4 эта грань представляет собою конус $\sigma_{R^\vee \cap \Gamma^\vee}$, порождённый множеством $R^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$ всех аннулирующих грань Γ образующих конуса σ_{R^\vee} , причём множество $R^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$ линейно порождает линейную оболочку $L(\Gamma^\vee) = \text{Ann } L(\Gamma)$ грани Γ^\vee . Так как $\text{Ann } \Gamma^\vee = \text{Ann } L(\Gamma^\vee) = L(\Gamma)$, двойственная к Γ^\vee грань $\Gamma^{\vee\vee} = \sigma_R \cap \text{Ann } \Gamma^\vee$ конуса σ_R совпадает с Γ . Тем самым, отображение $\Gamma \mapsto \Gamma^\vee$ инволютивно, а значит, биективно. \square

Замечание 12.2. В предл. 12.5 не предполагается равенства $\dim \sigma_R = \dim V$. Например, одномерный конус $\sigma_v = \{tv \mid t \geq 0\}$ представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора v и имеет две грани — нульмерную грань 0 и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Двойственный ему конус $\sigma_v^\vee = H_v^+ \subset V^*$ является векторным полупространством и тоже имеет две грани: n -мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann } 0 = H_v^+ \cap V^* = H_v^+$ и $(n - 1)$ -мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann } v = H_v$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 12.6. Если $w = e_0 + v \in M$, то $\bar{a}_i(w) = a_i(e_0) + \alpha_i(v) \geq 0$ при всех i , поэтому $w \in \bar{M}$, а с ним и $[0, w) \subset \bar{M}$. Наоборот, если $w = \lambda e_0 + v \in \bar{M}$, то при $\lambda \neq 0$ из неравенств $\bar{a}_i(w) = \lambda a_i(e_0) + \alpha_i(v) \geq 0$ вытекает, что точка $[0, w) \cap U_\xi = \lambda^{-1}w = e_0 + \lambda^{-1}v \in M$, а при $\lambda = 0$ луч $[0, v) \subset V$ является пределом при $s \rightarrow +\infty$ пересекающих многогранник M лучей $[0, w_s)$, где $w_s = w + sv$, поскольку при всех $s \geq 0$ точка $w_s = w + sv \in M$, коль скоро $w \in M$ и $\alpha_i(v) \geq 0$ при всех i , а луч $[0, w_s]$ имеет при каждом $s > 0$ ненулевой направляющий вектор $v_s = s^{-1}w + v$, стремящийся к v при $s \rightarrow \infty$. Для доказательства эквивалентности свойств (1) – (3) заметим, что если $\alpha_i(v) < 0$ хотя бы для одного функционала α_i , то для всех $p \in A(V)$ при всех $\lambda \gg 0$ выполняется неравенство $a_i(p + \lambda v) = a_i(p) + \lambda \alpha_i(v) < 0$, и ни одно из свойств (1) – (3) не имеет места. Напротив, если $\alpha_i(v) \geq 0$ для всех i , то для любой точки $p \in M$ при всех $\lambda \geq 0$ выполняются неравенства $a_i(p + \lambda v) = a_i(p) + \lambda \alpha_i(v) \geq a_i(p) \geq 0$, а с ними и каждое из свойств (1) – (3).

Упр. 12.8. Четырёхгранный конус в \mathbb{R}^3 , порождённый векторами

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 + e_2 - e_3, \quad v_3 = e_1 - e_2 - e_3, \quad v_4 = e_1 - e_2 + e_3,$$

не имеет двумерной грани, порождённой векторами v_1 и v_3 .