§11. Линейные отображения евклидовых пространств

Всюду в этом параграфе речь по-прежнему идёт про конечномерные евклидовы векторные пространства над полем $\mathbb{R}$.

11.1. Ортогональные операторы. Линейный оператор $F : V \to V$ на евклидовом векторном пространстве V называется *ортогональным* или *изометрией*, если он сохраняет длины векторов, т. е. $|Fv| = |v|$ для каждого $v \in V$. Поскольку скалярное произведение однозначно выражается через длины векторов по формуле

$$(u, w) = \frac{1}{2}\left(|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2\right),$$

каждый ортогональный оператор F автоматически сохраняет скалярные произведения, т. е.

$$\forall\, u, w \in V\ (Fu, Fw) = (u, w).$$

Сохранение скалярных произведений влечёт за собою сохранение углов между векторами и любых других величин, выражающихся через скалярные произведения. Например, каждый ортогональный оператор сохраняет евклидов объём параллелепипеда, равный корню из определителя Грама[1]. Поэтому определитель любого ортогонального оператора равен ± 1. В частности, все ортогональные операторы обратимы и составляют в полной линейной группе пространства V подгруппу, которая обозначается $\mathrm{O}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ и называется *ортогональной группой* евклидова пространства V. Сохраняющие ориентацию ортогональные операторы называются *собственными*. Они образуют в ортогональной группе подгруппу, которая обозначается

$$\mathrm{SO}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{O}(V) \cap \mathrm{SL}(V) = \{F \in \mathrm{O}(V) \mid \det F = 1\}$$

и называется *специальной* или *собственной* ортогональной группой. Ортогональные операторы определителя -1, меняющие ориентацию пространства на противоположную, называются *несобственными*.

Пример 11.1 (центральная симметрия)
Оператор $-\mathrm{Id} : v \mapsto -v$ является ортогональным на любом евклидовом векторном пространстве V. Он собственный, если $\dim V$ чётна, и несобственный, если $\dim V$ нечётна.

Упражнение 11.1. Покажите, что ортогональная группа одномерного пространства исчерпывается операторами $\pm\mathrm{Id}$.

Пример 11.2 (симметрии)
Как мы видели в n° 10.3.2 на стр. 134, с каждым векторным подпространством $U \subset V$ связано разложение в ортогональную прямую сумму $V = U \oplus U^{\perp}$. Обозначим через $s_U : V \to V$ линейное отображение, тождественно действующее на U и умножающее все векторы из $U^{\perp}$ на -1, т. е. переводящее произвольный вектор $v = v_U + v_{U^{\perp}} \in U \oplus U^{\perp} = V$ в вектор

$$s_U(v) = v_U - v_{U^{\perp}} = v - 2v_{U^{\perp}}. \tag{11-1}$$

Так как $|s_U(v)|^2 = |u_v - u_v^{\perp}|^2 = |u_v|^2 + |u_v^{\perp}|^2 = |u_v + u_v^{\perp}|^2 = |v|^2$, оператор s_U ортогонален. Он называется *симметрией* относительно подпространства U. При $U = 0$ получается центральная

[1] См. n° 10.2.1 на стр. 133.

симметрия из предыдущего прим. 11.1. В общем случае оператор s_U собственный тогда и только тогда, когда коразмерность подпространства U в V чётна. Все операторы σ_U *инволютивны*, т. е.

$$\sigma_U^2 = \mathrm{Id}_V\,.$$

11.1.1. Отражения в гиперплоскостях. Важнейшим специальным случаем симметрии является *отражение в гиперплоскости* $U = u^\perp$, перпендикулярной какому-либо ненулевому вектору $u \in V$. Оно обозначается через $\sigma_u = s_{u^\perp}$ и действует по формуле

$$\sigma_u(v) = v - 2\,\frac{(u,v)}{(u,u)}\cdot u\,. \tag{11-2}$$

в которую превращается (11-1) при $U^\perp = \mathbb{R}\,u$. Два отражения σ_u и σ_w совпадают тогда и только тогда, когда задающие их ненулевые векторы u и w пропорциональны. Отражения в гиперплоскостях являются несобственными изометриями. Любые два различных ненулевых вектора $a \neq b$ одинаковой длины $|a| = |b|$ переводятся друг в друга отражением σ_{a-b} относительно срединного перпендикуляра[1] к отрезку $[a,b]$ в $\mathbb{A}(V)$.

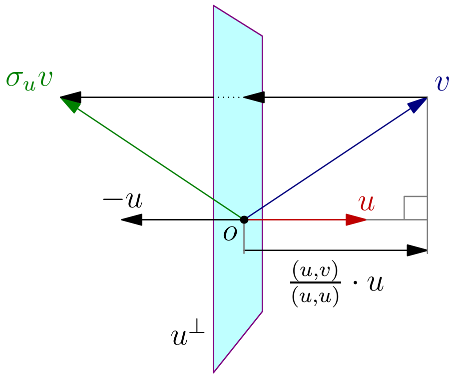

Рис. 11◇1. Отражение в гиперплоскости $u^\perp$.

Упражнение 11.2. Убедитесь в этом.

Теорема 11.1

Каждый нетождественный ортогональный оператор на n-мерном евклидовом векторном пространстве V является композицией не более n отражений в гиперплоскостях.

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$. Случай $n = 1$ покрывается упр. 11.1. Пусть $n > 1$ и $F(v) \neq v$ для некоторого ненулевого вектора v. Обозначим через σ отражение, переводящее $F(v)$ в v. Ортогональный оператор $G = \sigma \circ F$ оставляет вектор v на месте и, тем самым, переводит в себя гиперплоскость $v^\perp$. По индукции, ограничение $G|_{v^\perp} = \overline{\sigma}_k \circ \dots \circ \overline{\sigma}_1$ является композицией $k \leqslant (n-1)$ отражений $\overline{\sigma}_i : v^\perp \to v^\perp$ в $(n-2)$-мерных гиперплоскостях, лежащих в $v^\perp$. Каждое отражение $\overline{\sigma}_i$ является ограничением на подпространство $v^\perp$ отражения $\sigma_i : V \to V$ в $(n-1)$-й гиперплоскости, порождённой вектором v и $(n-2)$-мерным зеркалом отражения $\overline{\sigma}_i$. Так как вектор v неподвижен при всех отражениях σ_i, оператор $G = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1 : V \to V$ является композицией отражений σ_i. Следовательно, $F = \sigma \circ G$ является композицией $k + 1 \leqslant n$ отражений. □

Следствие 11.1

Всякий собственный ортогональный оператор является композицией чётного, а всякий несобственный — нечётного числа отражений в гиперплоскостях. □

Пример 11.3 (собственные изометрии трёхмерного пространства)

Каждый нетождественный собственный ортогональный оператор F в трёхмерном евклидовом векторном пространстве V является композицией $F = \sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ отражений в двух различных

[1] См. прим. 10.2 на стр. 131.

плоскостях $u_2^\perp$, $u_1^\perp$, ортогональных непропорциональным векторам u_2, u_1. Обозначим порождённую этими векторами плоскость через U. Оператор F тождественно действует на прямой

$$U^\perp = u_1^\perp \cap u_2^\perp = \mathbb{R} \cdot [u_1, u_2]$$

с вектором скорости[1] $[u_1, u_2]$. Ортогональная этой прямой гиперплоскость U переводится оператором F в себя, и ограничение $F|_U$ является собственным ортогональным преобразованием этой плоскости, поскольку $\det F = \det F|_U$. В силу предл. 3.5 на стр. 41 каждое собственное ортогональное линейное преобразование плоскости является поворотом.

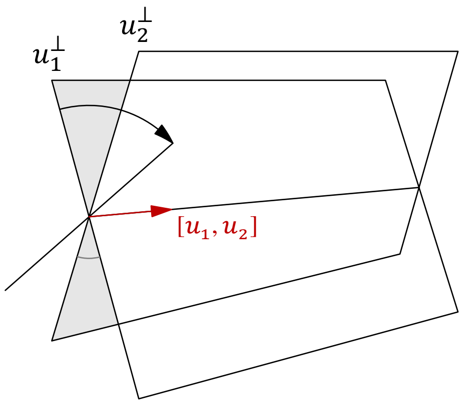

Рис. 11◇2. Поворот.

Упражнение 11.3. Убедитесь, что это поворот на угол $2\measuredangle(u_1 u_2)$ по часовой стрелке, если глядеть вдоль вектора $[u_1, u_2]$.

Мы заключаем, что собственная ортогональная группа трёхмерного евклидова пространства исчерпывается поворотами вокруг прямых. Этот факт известен как *теорема Эйлера*.

11.1.2. Ортогональные суммы поворотов. В этом разделе мы построим для любого ортогонального оператора $F : V \to V$ разложение пространства V в прямую сумму двумерных и одномерных F-инвариантных подпространств $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$, в котором все подпространства попарно ортогональны друг другу и F действует на каждом двумерном подпространстве U_i как поворот на некоторый угол $\varphi_i \in (0, \pi)$, а на каждом одномерном — как Id или $-$Id. Отметим, что любые два одномерных собственных подпространства с собственным числом 1 можно объединить в двумерную плоскость, на которой F действует поворотом на нулевой угол, а любые два одномерных собственных подпространства с собственным числом -1 — в двумерную плоскость, на которой F действует как поворот на угол π. Поэтому можно считать, что разложение, о котором идёт речь, состоит из двумерных подпространств U_i, на которых F действует поворотами на углы $\varphi_i \in [0, \pi]$, и, может быть, ещё одного или двух одномерных слагаемых, причём когда их два, то на одном из них F действует тождественно, а на другом — умножением на -1. Оператор F собственный если и только если таких одномерных слагаемых либо нет вовсе, либо оно ровно одно, и F действует на нём тождественно.

Лемма 11.1
Каждый линейный оператор $F : V \to V$ на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$ и образуем из него $n + 1$ векторов v, Fv, F^2v, …, F^nv, где $n = \dim V$ и F^kv обозначает результат k-кратного последовательного применения оператора F к вектору v. Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, что $(F^k + a_1F^{k-1} + \dots + a_{k-1}F + a_k)v = 0$. Заключённый в скобки линейный оператор является результатом подстановки $t = F$ в многочлен $f(t) = t^k + a_1t^{k-1} + \dots + a_{k-1}t + a_k \in \mathbb{R}[t]$. Такой многочлен представляет собою произведение

[1] См. прим. 10.7 на стр. 139.

$f(t) = g_1(t) \cdots g_m(t)$ линейных двучленов вида $t - \alpha$ и квадратных трёхчленов вида $t^2 - \alpha t - \beta$ с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение F и применяя полученный оператор к вектору v, мы заключаем, что $g_1(F) \circ \cdots \circ g_m(F)\, v = 0$. Рассмотрим наименьшее k, для которого вектор $w = g_{k+1}(F) \circ \cdots \circ g_m(F)\, v \neq 0$. Тогда $g_k(F)\, w = 0$. Для $g_k(F) = F - \alpha$ это значит, что $F(w) = \alpha w$, т. е. одномерное подпространство $\mathbb{R}\, w$ переводится оператором F в себя. Для $g_k(F) = F^2 - \alpha F - \beta$ получаем равенство $F(F(w)) = \alpha F(w) + \beta w$, означающее, что линейная оболочка векторов w и $F(w)$ переводится оператором F в себя. □

Теорема 11.2

Каждый ортогональный линейный оператор F на конечномерном евклидовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе матрицей, на главной диагонали которой стоят числа ± 1 и 2×2 блоки вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad 0 < \varphi_i < \pi\,, \tag{11-3}$$

а все остальные элементы равны нулю. С точностью до перестановки блоков и диагональных элементов эта матрица не зависит от выбора ортонормального базиса, в котором оператор имеет матрицу такого вида.

Доказательство теор. 11.2. Разложение пространства V в ортогональную прямую сумму F-инвариантных одномерных и двумерных подпространств U_i строится индукцией по $\dim V$. Случаи $\dim V = 1, 2$ уже были разобраны в упр. 11.1 на стр. 140 и предл. 3.5 на стр. 41 соответственно. Пусть $\dim V \geqslant 3$. Согласно лем. 11.1 оператор $F : V \to V$ переводит в себя некоторое одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$. Поскольку F сохраняет скалярное произведение, ортогонал $U^\perp$ к подпространству U тоже переводится оператором F в себя. По индукции, ограничения F на U и на $U^\perp$ обладают нужными разложениями. Складывая эти разложения вместе, получаем требуемое разложение для $V = U \oplus U^\perp$. Если выбрать в каждом подпространстве U_i ортонормальный базис и соединить эти базисы в один ортонормальный базис $\boldsymbol{e}$ пространства V, то оператор F запишется в этом базисе матрицей $F_{\boldsymbol{e}}$, состоящей из расположенных на главной диагонали блоков вида (11-3), и, может быть, ещё нескольких диагональных элементов вида ± 1. Поэтому характеристический многочлен оператора F является произведением линейных множителей вида $t \pm 1$ и характеристических многочленов блоков (11-3):

$$\det \begin{pmatrix} t - \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & t - \cos\varphi_i \end{pmatrix} = t^2 - 2t\,\cos\varphi_i + 1\,.$$

Все они приведены и неприводимы. Поскольку характеристический многочлен не зависит от выбора базиса и разложение в произведение неприводимых приведённых многочленов в $\mathbb{R}[t]$ единственно с точностью до перестановки сомножителей, набор отличных от нуля и π углов поворотов и количества стоящих на диагонали чисел $+1$ и -1 не зависят от способа разложения. □

Пример 11.4 (несобственные ортогональные операторы в трёхмерном пространстве)

Согласно теор. 11.2 каждый несобственный ортогональный оператор на трёхмерном евклидовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ 0 & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi\,,$$

и является композицией поворота вокруг прямой с направляющим вектором e_1 и отражения в перпендикулярной оси поворота плоскости $e_1^\perp$.

Пример 11.5 (движения трёхмерного евклидова аффинного пространства)
Напомню[1], что эндоморфизм $F : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ аффинного пространства $\mathbb{A}(V)$, ассоциированного с евклидовым векторным пространством V, называется *движением*, если он сохраняет расстояния между точками. Каждое движение автоматически биективно и переводит прямые в прямые, а значит, является аффинным преобразованием[2], т. е. композицией $F = \tau_v \circ G_p$ параллельного переноса τ_v на некоторый вектор $v \in V$ и линейного ортогонального преобразования $G_p : V \to V$, оставляющего на месте некоторую точку $p \in \mathbb{A}(V)$. Пусть теперь $\dim V = 3$.

Если движение F собственное[3], то ортогональный оператор G_p тоже собственный и является поворотом $\varrho_{\ell,\varphi}$ на угол φ (возможно, нулевой) вокруг некоторой проходящей через точку p прямой ℓ. Разложим вектор сдвига в сумму $v = u + w$ вектора u, параллельного прямой ℓ, и вектора w перпендикулярного прямой ℓ. Композиция $\tau_w \circ \varrho_{\ell,\varphi}$ переводит в себя каждую перпендикулярную прямой ℓ плоскость Π и действует в ней как композиция поворота со сдвигом, т. е. как поворот на тот же угол φ, но с другим центром[4], зависящим только от вектора w. Таким образом, композиция $\tau_w \circ \varrho_{\ell,\varphi} = \varrho_{\ell',\varphi}$ является поворотом пространства на тот же угол φ, но относительно прямой ℓ', которая параллельна оси ℓ поворота G_p. Такой поворот перестановочен со сдвигом τ_u вдоль оси поворота и композиция

$$F = \tau_v \circ G_p = \tau_u \circ \tau_w \circ \varrho_{\ell,\varphi} = \tau_u \circ \varrho_{\ell',\varphi} = \varrho_{\ell',\varphi} \circ \tau_u$$

представляет собою *винтовое движение* — композицию перестановочных друг с другом поворота вокруг прямой и сдвига вдоль этой прямой. Ось винтового движения с ненулевым углом закрутки однозначно характеризуется как единственная прямая в пространстве, переводимая этим движением в себя. Итак, каждое собственное движение пространства есть винтовое движение — возможно, с нулевым вектором сдвига и/или нулевым углом закрутки.

Если движение F несобственное[5], то ортогональный оператор G_p тоже несобственный и является либо отражением σ_Π в проходящей через точку p плоскости Π, либо композицией такого отражения с поворотом $\varrho_{\ell,\varphi}$ вокруг проходящей через p перпендикулярно плоскости Π прямой ℓ. Раскладывая, как и выше, сдвиг τ_v в композицию сдвигов на перпендикулярный к плоскости Π вектор u и параллельный Π вектор w, мы видим, что в первом случае композиция $\tau_u \sigma_\Pi = \sigma_{\Pi'}$ является отражением в плоскости $\Pi' = \Pi + u/2$, полученной из Π сдвигом на вектор[6] $u/2$, и движение $F = \tau_v \circ G_p = \tau_w \circ \tau_u \circ \sigma_\Pi = \tau_w \circ \sigma_{\Pi'} = \sigma_{\Pi'} \circ \tau_w$ представляет собою *скользящую симметрию* — композицию отражения в плоскости с параллельным этой плоскости сдвигом. Во втором случае, в силу уже сказанного,

$$F = \tau_v \circ G_p = \tau_w \circ \tau_u \circ \sigma_\Pi \circ \varrho_{\ell,\varphi} = \tau_w \circ \sigma_{\Pi'} \circ \varrho_{\ell,\varphi} = \sigma_{\Pi'} \circ \tau_w \circ \varrho_{\ell,\varphi} = \sigma_{\Pi'} \circ \varrho_{\ell',\varphi}$$

представляет собою композицию перестановочных друг с другом поворота вокруг прямой и отражения в плоскости, перпендикулярной оси поворота. В обоих случаях зеркало отражения

[1] См. n° 3.4 на стр. 40.
[2] См. n° 2.1 на стр. 22.
[3] Т. е. сохраняет ориентацию.
[4] См. n° 3.4.2 на стр. 41.
[5] Т. е. меняет ориентацию на противоположную.
[6] Ибо $\sigma_{\Pi'} \circ \sigma_\Pi = \tau_u$, см. n° 3.4.2 на стр. 41.

однозначно описывается как геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки пространства с их образами при движении F.

11.2. Евклидово сопряжение линейных отображений. С каждым линейным отображением $F : U \to W$ между евклидовыми пространствами U, W связано *евклидово сопряжённое* отображение $F^\times : W \to U$, которое однозначно характеризуется тем, что для всех $u \in U$, $w \in W$

$$(Fu, w) = (u, F^\times w)\,. \tag{11-4}$$

Предложение 11.1

Для любого линейного отображения евклидовых пространств $F : U \to W$ удовлетворяющее равенству (11-4) линейное отображение $F^\times : W \to U$ существует и единственно. Матрицы $F_{\boldsymbol{wu}}$ и $F^\times_{\boldsymbol{uw}}$ отображений F и $F^\times$ в произвольных базисах $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространств U и W связаны соотношением

$$F^t_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}} = G_{\boldsymbol{u}}\, F^\times_{\boldsymbol{uw}}\,, \tag{11-5}$$

где $G_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{u}$ и $G_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{w}$ — матрицы Грама базисов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$.

Доказательство. Левая часть (11-4) является результатом применения к вектору $Fu \in W$ линейного функционала $g_w : W \to \mathbb{R}$, $v \mapsto (v, w)$, в который переходит вектор $w \in W$ при задаваемом евклидовой структурой на пространстве W изоморфизме $G_W : W \xrightarrow{\sim} W^*$, $w \mapsto g_w$, из форм. (10-10) на стр. 133. Композиция $g_w \circ F$ линейного функционала $g_w : W \to \mathbb{R}$ с линейным отображением $F : U \to W$ является результатом применения к ковектору $g_w \in W^*$ двойственного к F линейного отображения[1] $F^* : W^* \to V^*$, $\xi \mapsto \xi \circ F$. Таким образом, в левой части (11-4) стоит значение ковектора $F^*(g_w) = F^* G_W(w)$ на векторе u. В правой части (11-4) написан результат применения к вектору u ковектора $g_{F^\times w} = G_U F^\times(w)$, в который переходит вектор $F^\times(w) \in U$ при изоморфизме $G_U : U \xrightarrow{\sim} U^*$, $u \mapsto g_u$, задаваемом евклидовой структурой н пространстве U. Таким образом, равенство (11-4) равносильно соотношению $F^* G_W = G_U F^\times$, в котором $G_U : U \xrightarrow{\sim} U^*$ и $G_W : W \xrightarrow{\sim} W^*$ суть евклидовы корреляции из n° 10.3 на стр. 133, а линейное отображение $F^* : W^* \to U^*$ двойственно к F. Этому соотношению удовлетворяет ровно одно линейное отображение $F^\times = G_U^{-1} F^* G_W : W \to U$.

В терминах базисов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ равенство (11-4) равносильно mn соотношениям

$$(Fu_i, w_j) = (u_i, F^\times w_j)$$

на скалярные произведения базисных векторов. Они собираются в матричное равенство

$$G_{F(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{w}} = G_{\boldsymbol{u},F^\times(\boldsymbol{w})}\,,$$

где $G_{F(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{w}} = F(\boldsymbol{u})^t \cdot \boldsymbol{w}$ — матрица Грама наборов $F(\boldsymbol{u}) = (Fu_1, \dots, Fu_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$, а $G_{\boldsymbol{u},F^\times(\boldsymbol{w})} = \boldsymbol{u}^t \cdot F(\boldsymbol{w})$ — матрица Грама наборов $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $F^\times(\boldsymbol{w}) = (F^\times w_1, \dots, F^\times w_m)$. Поскольку $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}$, а $F^\times(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\, F^\times_{\boldsymbol{uw}}$, эти матрицы Грама имеют вид

$$G_{F(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{w}} = F^t_{\boldsymbol{wu}} \boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{w} = F^t_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}} \quad \text{и} \quad G_{\boldsymbol{u},F^\times(\boldsymbol{w})} = \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{u}\, F^\times_{\boldsymbol{uw}} = G_{\boldsymbol{u}} F^\times_{\boldsymbol{uw}}\,.$$

Таким образом, соотношение (11-4) равносильно матричному равенству (11-5). □

[1] См. n° 7.3 на стр. 88.

Замечание 11.1. Обратите внимание, что матричное равенство $F^{\times}_{\boldsymbol{uw}} = G^{-1}_{\boldsymbol{u}} F^{t}_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}}$ согласуется с операторным равенством $F^{\times} = G^{-1}_{U} F^{*} G_{W}$: матрицы Грама $G_{\boldsymbol{u}}$ и $G_{\boldsymbol{w}}$ суть матрицы евклидовых корреляций[1] $G_U : U \xrightarrow{\sim} U^*$ и $G_W : W \xrightarrow{\sim} W^*$, записанные в парах двойственных базисов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}^*$ и $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}^*$ пространств U, U^* и W, W^*, а $F^{t}_{\boldsymbol{wu}} = F^{*}_{\boldsymbol{w}^*\boldsymbol{u}^*}$ есть матрица двойственного к F оператора[2] $F^* : W^* \to U^*$, записанная в базисах $\boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{u}^*$.

Следствие 11.2
В ортонормальных базисах $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ пространств U, W матрицы евклидово сопряжённых операторов F и $F^{\times}$ транспонированы друг другу: $F^{\times}_{\boldsymbol{uw}} = F^{t}_{\boldsymbol{wu}}$. □

Предложение 11.2
Для любого линейного отображения $F : U \to W$ выполняются равенства

$$F^{\times\times} = F\,, \quad \ker F^{\times} = (\operatorname{im} F)^{\perp}\,, \quad \operatorname{im} F^{\times} = (\ker F)^{\perp}\,,$$

а для любой пары линейных отображений $F : U \to V$, $G : V \to W$ — равенство $(GF)^{\times} = F^{\times}G^{\times}$.

Доказательство. Равенство $F^{\times\times} = F$ вытекает из соотношения (11-4) и симметричности скалярного произведения. Вектор $w \in \ker F^{\times}$ если и только если для всех $u \in U$ выполняется равенство $(u, F^{\times}w) = 0$, которое в силу соотношения (11-4) равносильно равенству (Fu, w), т. е. ортогональности подпространства $\operatorname{im} F$ вектору w. Поэтому $\ker F^{\times} = (\operatorname{im} F)^{\perp}$. Написав это равенство для оператора $F^{\times}$ в роли F и беря ортогонал к обеим частям, получаем равенство $(\ker F)^{\perp} = \operatorname{im} F^{\times}$. Последнее утверждение вытекает из равенств $(GFu, w) = (Fu, G^{\times}w) = (u, F^{\times}G^{\times}w)$, выполненных для всех $u \in U$, $w \in W$. □

11.3. Самосопряжённые и антисамосопряжённые операторы. В прим. 9.4 на стр. 119 мы видели, что каждое пространство с линейной инволюцией является прямой суммой собственных подпространств с собственными значениями ± 1. Таким образом,

$$\operatorname{End}(V) = \operatorname{End}^{+}(V) \oplus \operatorname{End}^{-}(V)\,, \quad \text{где}$$
$$\operatorname{End}^{+}(V) \overset{\text{def}}{=} \{F : V \to V \mid F^{\times} = F\} \quad \text{и} \quad \operatorname{End}^{+}(V) \overset{\text{def}}{=} \{F : V \to V \mid F^{\times} = -F\}\,.$$

Операторы из $\operatorname{End}^{+}(V)$ называются *самосопряжёнными* и характеризуются тем, что для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство $(Fu, w) = (u, Fw)$. Матрица такого оператора в ортонормальном базисе симметрична относительно главной диагонали, т. е. не меняется при транспонировании. Операторы из $\operatorname{End}^{-}(V)$ называются *антисамосопряжёнными* и характеризуются тем, что для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство $(Fu, w) = -(u, Fw)$. Матрица такого оператора в ортонормальном базисе кососимметрична, т. е. меняет при транспонировании знак. Разложение произвольного оператора F в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого задаётся формулой $F = (F + F^{\times})/2 + (F - F^{\times})/2$.

Лемма 11.2
Если (анти)самосопряжённый линейный оператор $F : V \to V$ переводит в себя некоторое подпространство $U \subset V$, то он переводит в себя и его ортогонал $U^{\perp}$.

[1] См. упр. 10.4 на стр. 133.
[2] См. предл. 7.3 на стр. 90.

Доказательство. Пусть $w \in U^{\perp}$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, Fw) = \pm(Fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, ибо $Fu \in U$. Тем самым, $Fw \in U^{\perp}$. □

Лемма 11.3
Собственные векторы с разными собственными значениями у самосопряжённого оператора ортогональны друг другу.

Доказательство. Если $Fu = \lambda u$ и $Fw = \mu w$, то из равенства $(Fu, w) = (u, Fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$. □

Упражнение 11.4. Покажите, что все одномерные инвариантные подпространства антисамосопряжённого оператора содержатся в его ядре (в частности, у антисамосопряжённого оператора нет ненулевых вещественных собственных чисел).

Теорема 11.3 (теорема о нормальном базисе)
Каждый самосопряжённый оператор F на конечномерном евклидовом пространстве можно диагонализовать в некотором ортонормальном базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, доказывать нечего. Если $\dim V = 2$, оператор F задаётся в произвольно взятом ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}$ симметричной матрицей

$$F_{\boldsymbol{e}} = F_{\boldsymbol{e}}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

При $a = c$ и $b = 0$ эта матрица уже диагональна. Если $a \neq c$ или $b \neq 0$, характеристический многочлен $\det(tE - F_{\boldsymbol{e}}) = t^2 - (a + c) \cdot t + (ac - b^2)$ оператора F имеет дискриминант

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 > 0\,,$$

а значит, имеет два различных вещественных корня. Отвечающие им ненулевые собственные векторы перпендикулярны по лем. 11.3. Деля их на их длины, получаем искомый ортонормальный базис. При $\dim V \geqslant 3$ у оператора F имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство $U \subset V$, и его ортогональное дополнение $U^{\perp}$ тоже F-инвариантно по лем. 11.2. По индукции, в U и $U^{\perp}$ есть ортонормальные базисы из собственных векторов оператора F. Объединение этих базисов даёт искомый базис в V. □

Теорема 11.4 (канонический вид антисамосопряжённого оператора)
Каждый антисамосопряжённый оператор F на конечномерном евклидовом пространстве имеет в подходящем ортонормальном базисе матрицу, ненулевые элементы которой исчерпываются расположенными на главной диагонали 2×2 блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a_i > 0\,,$$

причём набор этих блоков с точностью до перестановки не зависит от выбора такого базиса.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $F = 0$, что так при $\dim V = 1$, то доказывать нечего. Если $\dim V = 2$ и $F \neq 0$, то в любом ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}$ оператор F имеет антисимметричную матрицу

$$F_{\boldsymbol{e}} = -F_{\boldsymbol{e}}^t = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Меняя при необходимости знак у первого базисного вектора, можно считать, что $a > 0$. При $\dim V \geqslant 3$ у оператора F имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство $U \subset V$, и его ортогональное дополнение $U^{\perp}$ тоже F-инвариантно по лем. 11.2. По индукции, в U и $U^{\perp}$ есть ортонормальные базисы, в которых матрицы ограничений $F|_U$ и $F|_{U^{\perp}}$ имеют требуемый вид. Объединение этих базисов даёт искомый базис в V. Поскольку характеристический многочлен оператора F является произведением монома t^m, где $m = \dim\ker F = \dim V - \operatorname{rk} F$, и неприводимых двучленов $(t^2 + a_i^2)$ по всем диагональным 2×2 блокам матрицы F_e, набор блоков не зависит от выбора базиса в силу единственности разложения на неприводимые множители в $\mathbb{R}[t]$. □

11.4. Сингулярные числа и сингулярные направления. В этом разделе мы покажем, что каждое линейное отображение $F : U \to W$ однозначно раскладывается в композицию $F = GSP$ ортогональной проекции $P : U \twoheadrightarrow V$ на ортогонал $V = (\ker F)^{\perp} \subset U$ к ядру оператора F, невырожденного самосопряжённого оператора $S : V \to V$, представляющего собою композицию коммутирующих друг с другом растяжений с положительными коэффициентами во взаимно перпендикулярных направлениях, и ортогонального вложения $G : V \hookrightarrow W$. Ортогональные направления, вдоль которых растягивает подпространство $V \subset U$ оператор S, и коэффициенты этих растяжений называются, соответственно, *сингулярными направлениями* и *сингулярными числами* линейного отображения F. Если $\ker F \neq 0$, ненулевые векторы из $\ker F$ тоже считаются сингулярными направлениями с сингулярным числом нуль. Если $\ker F = 0$, то $V = U$ и $P = \mathrm{Id}_U$.

Лемма 11.4

Для любого линейного отображения $F : U \to W$ между евклидовыми пространствами U, W обе композиции $FF^{\times} \in \operatorname{End}(W)$, $F^{\times}F \in \operatorname{End}(U)$ являются самосопряжёнными линейными операторами с неотрицательными собственными числами. Отображение F сюрьективно (соотв. инъективно) если и только если все собственные числа оператора $FF^{\times}$ (соотв. $F^{\times}F$) строго положительны.

Доказательство. Каждый из операторов $FF^{\times}$ и $F^{\times}F$ очевидно самосопряжён и следовательно диагонализуем по теор. 11.3 на стр. 147. Если для некоторого ненулевого вектора $w \in W$ выполняется равенство $FF^{\times}w = \lambda w$, то $(F^{\times}w, F^{\times}w) = (FF^{\times}w, w) = \lambda \cdot (w, w)$ и либо $w \in \ker F^{\times}$ и $\lambda = 0$, либо $\lambda = (F^{\times}w, F^{\times}w)/(w, w) > 0$. Аналогично, если $F^{\times}Fu = \mu u$ для ненулевого $u \in U$, то либо $\mu = 0$ и $u \in \ker F$, либо $\mu = (Fu, Fu)/(u, u) > 0$. Поэтому все ненулевые собственные числа каждого из операторов положительны. Если $\operatorname{im} F = W$, то[1] $\ker F^{\times} = (\operatorname{im} F)^{\perp} = 0$, откуда все собственные числа оператора $FF^{\times}$ положительны. Наоборот, если $\operatorname{im} F \neq W$, то $\ker FF^{\times} \supset \ker F^{\times} = (\operatorname{im} F)^{\perp} \neq 0$. Аналогично, если $\ker F = 0$, то все собственные числа оператора $F^{\times}F$ строго положительны, и наоборот, если $\ker F \neq 0$, то и $\ker F^{\times}F \supset \ker F \neq 0$. □

Теорема 11.5

Каждое линейное отображение $F : U \to W$ между евклидовыми пространствами U, W единственным образом раскладывается в композицию $F = G_F \circ S_F \circ P_F$ ортогональной проекции $P_F : U \twoheadrightarrow V$ на ортогонал V к ядру $\ker F \subset U$, невырожденного самосопряжённого оператора $S_F : V \xrightarrow{\sim} V$ с положительными собственными значениями $\alpha_1, \dots \alpha_r$, где $r = \operatorname{rk} F = \dim\operatorname{im} F = \dim V$, и изометрического вложения $G_F : V \hookrightarrow W$. При этом набор $\alpha_1^2, \dots \alpha_r^2$ квадратов собственных чисел оператора S_F является набором всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел оператора $F^{\times}F : U \to U$.

[1] См. предл. 11.2 на стр. 146.

Доказательство. Согласно теор. 11.3 на стр. 147 в евклидовом пространстве U имеется ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов $u_1, \dots, u_n$ самосопряжённого линейного оператора $F^{\times}F : U \to U$, причём все собственные значения этого оператора неотрицательны по лем. 11.4, т. е. $F^{\times}Fu_i = \alpha_i^2 u_i$ для некоторых вещественных $\alpha_i \geqslant 0$. Перенумеруем базис так, чтобы $\alpha_i \neq 0$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ и $\alpha_i = 0$ при $i > r$. Тогда, как мы видели в доказательстве лем. 11.4, все векторы u_i с $i > r$ лежат в ядре отображения F. Напротив, при $1 \leqslant i, j \leqslant r$ равенства

$$(Fu_i, Fu_j) = (F^{\times}Fu_i, u_j) = \alpha_i^2\,(u_i, u_j) = \begin{cases} \alpha_i^2 > 0 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

показывают, что векторы $w_i = Fu_i/\alpha_i$ образуют в пространстве W ортонормальную систему. В частности, они линейно независимы. Так как $F(u_j) = 0$ при $j > r$, для любого $u = \sum x_i u_i \in U$ выполняется равенство $F(u) = \alpha_1 x_1 w_1 + \dots + \alpha_r x_r w_r$, т. е. векторы w_i с $1 \leqslant i \leqslant r$ составляют ортонормальный базис в $\operatorname{im} F$, а векторы u_i с $1 \leqslant i \leqslant r$ — ортонормальный базис в ортогональном дополнении V к ядру $\ker F$. Оператор F является композицией изометрического изоморфизма $G_F : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} F$, $u_i \mapsto w_i$, диагонального оператора $S_F : V \to V$, $u_i \mapsto \alpha_i u_i$, и ортогональной проекции $P_F : U \twoheadrightarrow V$ вдоль $\ker F$.

Если имеется какое-либо ещё разложение $F = GSP_F$, где $P_F : U \twoheadrightarrow V$ — ортогональная проекция вдоль $\ker F$, то из предыдущего рассуждения вытекает, что пространство $V = (\ker F)^{\perp}$ является прямой ортогональной суммой всех собственных подпространств V_i оператора $F^{\times}F$, отвечающих ненулевым собственным значениям α_i^2 этого оператора, а композиция $GS : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} F$ совпадает с ограничением $F|_V$. Поскольку $S^{\times} = S$ как операторы $V \to V$, а $G^{\times} = G^{-1}$ как изометрческие операторы $\operatorname{im} F \xrightarrow{\sim} V$, мы заключаем, что $F^{\times}F|_V = S^2$. Так как оператор S^2 диагонализуется в том же самом базисе, что и S, мы заключаем, что самосопряжённый оператор S действует на каждом подпространстве V_i умножением на α_i и, тем самым, определяется по F однозначно. А тогда и $G = S^{-1} \circ F|_V : V \to W$ определяется однозначно. □

Упражнение 11.5. Убедитесь, что оператор $F^{\times} : W \to V$ действует на построенные в доказательстве теор. 11.5 векторы $w_1, \dots, w_r \in W$ по правилу $w_i \mapsto \alpha_i u_i$ и аннулирует ортогональное дополнение к их линейной оболочке. Выведите отсюда, что множества всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел у операторов $F^{\times}F$ и $FF^{\times}$ одинаковы.

Определение 11.1 (сингулярные числа и сингулярные направления)
В условиях теор. 11.5 набор из $\dim U$ неотрицательных квадратных корней α_i из собственных значений самосопряжённого оператора $F^{\times}F : U \to U$ называется *набором сингулярных чисел* линейного отображения $F : U \to W$ между евклидовыми пространствами U, W. Ровно $\operatorname{rk} F$ из них строго положительны. Одномерные инвариантные подпространства[1] оператора $F^{\times}F$ называются *сингулярными направлениями* отображения F.

Пример 11.6 (этимология эпитета «сингулярный»)
Свяжем с отображением $F : U \to W$ функцию $\varphi : U \smallsetminus 0 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto (Fu, Fu)/(u, u)$. Покажем, что её производная зануляется ровно на собственных направлениях оператора $F^{\times}F$.

Упражнение 11.6. Покажите, что $(u, u)'(v) = 2(u, v)$ и $(Fu, Fu)'(v) = 2(Fu, Fv) = 2(F^{\times}Fu, v)$.

Согласно правилу дифференцирования дробей, условие $\varphi'(u) = 0$ равносильно тому, что для любого $v \in V$ выполняется равенство $2(F^{\times}Fu, v)(u, u) - 2(Fu, Fu)(u, v) = 0$, означающее, что

[1] Т. е. одномерные подпространства, порождённые ненулевыми собственными векторами.

$F^{\times}Fu = u \cdot (Fu, Fu)/(u, u)$, т. е. что вектор u является собственным для оператора $F^{\times}F$ с собственным значением $(Fu, Fu)/(u, u) = (F^{\times}Fu, u)/(u, u)$.

Следствие 11.3 (полярное разложение)
Каждое биективное линейное преобразование $F \in \mathrm{GL}(V)$ евклидова пространства V допускает единственное разложение $F = G_F S_F$, в котором оператор $G_F \in \mathrm{O}(V)$ ортогонален, а $S_F \in \mathrm{GL}(V)$ самосопряжён и имеет положительные собственные значения. Квадраты этих собственных значений являются собственными числами оператора $F^{\times}F$.

Доказательство. Поскольку оператор F биективен, правый член его канонического разложения $F = G_F \circ S_F \circ P_F$ из теор. 11.5 является тождественным отображением, а самосопряжённый оператор S_F не имеет ядра. Следовательно все собственные числа оператора S_F строго положительны. □

Замечание 11.2. (явные формулы для G_F и S_F) Компоненты $G_F \in \mathrm{O}(V)$ и S_F полярного разложения $F = G_F \circ S_F$ однозначно находятся из условий $G_F^{\times}G = \mathrm{Id}_V$ и $S_F^{\times} = S_F$. А именно,

$$F^{\times}F = S_F^{\times}G_F^{\times}G_F S_F = S_F^2\,,$$

откуда $S_F = \sqrt{F^{\times}F}$ и $G_F = FS_F^{-1}$. Отметим, что так как нуль не является собственным числом оператора $F^{\times}F$, аналитическая вне нуля функция $\sqrt{t}$ алгебраически вычислима на операторе $F^{\times}F$ при помощи стандартной интерполяционной процедуры из n° 9.4.1 на стр. 124.

Упражнение 11.7. Покажите, что каждый невырожденный линейный оператор $F \in \mathrm{GL}(V)$ на евклидовом пространства V также допускает единственное разложение $F = SR$, в котором $R \in \mathrm{O}(V)$, а S самосопряжён и имеет положительные собственные значения, квадраты которых равны собственным числам оператора $FF^{\times}$.

Пример 11.7
Найдём полярное разложение $F = GS$ для оператора $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе. Поскольку $\det F = -4$, оператор F невырожден. Самосопряжённый оператор $F^{\times}F$ имеет матрицу

$$C = F^tF = \begin{pmatrix} 22/15 & 4/15 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/15 & 28/15 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & 2/3 \\ -4/3 & 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

у которой след $\mathrm{tr}(C) = 9$, сумма главных 2×2-миноров

$$\det\begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} = 16/3\,, \quad \det\begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3\,, \quad \det\begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3$$

равна 24, определитель $\det(C) = \det^2 F = 16$ и характеристический многочлен

$$\det(tE - C) = t^3 - 9\,t^2 + 24\,t - 16 = (t-1)(t-4)^2\,.$$

Так как оператор $F^\times F$ диагонализуем, он аннулируется многочленом[1] $(t-1)(t-4)$. Следовательно, матрица $H = \sqrt{C}$ самосопряжённого сомножителя h полярного разложения $F = gh$ имеет вид[2] $aE + bC$, где интерполяционный многочлен $p(t) = a + bt$ для вычисления функции $\sqrt{t}$ на матрице C однозначно определяется тем, что $p(1) = \sqrt{1} = 1$ и $p(4) = \sqrt{4} = 2$, т. е. $a + b = 1$ и $a + 4\,b = 2$, откуда $a = 2/3$, $b = 1/3$. Таким образом, полярное разложение имеет вид $F = GH$, где самосопряжённая матрица $H = \sqrt{C}$ равна

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 8/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 11/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix}$$

а ортогональная матрица $G = FH^{-1}$ равна

$$\begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/18 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & 13/18 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/15 & -2/3 & 2/15 \\ 2/15 & 1/3 & 14/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Упражнение 11.8. Убедитесь, что $G^tG = E$.

Следствие 11.4 (SVD-разложение[3])
Каждая вещественная прямоугольная матрица $F \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ раскладывается в произведение $F = T_mDT_n$, в котором матрицы $T_m \in \mathrm{O}_m$ и $T_n \in \mathrm{O}_n$ ортогональны, а $m \times n$-матрица $D = \left(d_{ij}\right)$ диагональна и неотрицательна в том смысле, что $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а все $d_{ii} \geqslant 0$. При этом ровно $\operatorname{rk} F$ диагональных элементов матрицы D отлично от нуля, и они с точностью до перестановки диагональных элементов не зависят от выбора указанного разложения.

Доказательство. Будем воспринимать $F = F_{\boldsymbol{mn}}$ как записанную в стандартных базисах $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$ пространств $U = \mathbb{R}^n$ и $W = \mathbb{R}^m$ матрицу линейного оператора $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Обозначим через $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots , u_n)$ ортонормальный базис пространства U, построенный в доказательстве теор. 11.5, а через $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots , w_m)$ — любой ортонормальный базис пространства W, содержащий ортонормальный набор векторов $w_i = F(u_i)/\alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, из доказательства теор. 11.5. Оператор $F : u_i \mapsto \alpha_i w_i$ задаётся в базисах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ диагональной матрицей $D = F_{\boldsymbol{wu}}$, ненулевые диагональные элементы которой суть сингулярные числа $\alpha_1, \dots , \alpha_n$ оператора F. Поэтому $F = F_{\boldsymbol{mn}} = C_{\boldsymbol{mw}}F_{\boldsymbol{wu}}C_{\boldsymbol{un}}$, где $C_{\boldsymbol{mw}}$ — ортогональная матрица перехода от базиса $\boldsymbol{w}$ к стандартному базису $\boldsymbol{m}$ в $\mathbb{R}^m$, а $C_{\boldsymbol{un}} = C_{\boldsymbol{nu}}^{-1} = C_{\boldsymbol{nu}}^t$ — ортогональная матрица перехода от стандартного базиса $\boldsymbol{n}$ в $\mathbb{R}^n$ к базису $\boldsymbol{u}$. Для любого другого разложения $F = T_mAT_n$ с ортогональными T_n, T_m и диагональной матрицей A имеем $F^tF = T_n^{-1}A^tAT_n$. Поскольку подобные матрицы имеют одинаковые с точностью до перестановки собственные числа, стоящие на диагонали диагональной матрицы A^tA квадраты диагональных элементов матрицы A суть собственные числа матрицы F^tF. □

[1] См. предл. 9.4 на стр. 120.
[2] См. n° 9.4.1 на стр. 124.
[3] «SVD» является аббревиатурой от английского *singular values decomposition*.

11.5. Инвариантные углы между подпространствами. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ пару векторных подпространств U, W размерностей $\dim U = n \leqslant m = \dim W$ и обозначим через $\pi : U \to W$ ортогональную проекцию вдоль $W^\perp$. Пусть эта проекция имеет сингулярные числа $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$. Так как $|\pi u| = |u| \cdot \cos \measuredangle(\pi u, u)$ для всех $u \in U$, числа $\alpha_i = \cos \varphi_i$ являются косинусами неубывающих углов

$$0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n \leqslant \pi/2\,, \quad \varphi_i = \measuredangle(w_i, u_i)\,, \tag{11-6}$$

между векторами $u_1, \dots, u_n$ некоторого ортонормального базиса $\boldsymbol{u}$ в U и первыми n векторами такого ортонормального базиса $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ в W, что вектор πu_i пропорционален вектору w_i при $1 \leqslant i \leqslant n$, причём по теор. 11.5 этот набор углов не зависит от выбора ортонормального базиса в U, проектирующегося в ортогональный набор векторов из W. Поэтому углы (11-6) называются *инвариантными углами* между подпространствами U, W. Мы будем обозначать набор инвариантных углов через $\measuredangle(U, W) \overset{\text{def}}{=} (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Предложение 11.3

Максимальное значение скалярного произведения (u, w) всевозможных пар векторов $u \in U$, $w \in W$ единичной длины $|u| = |w| = 1$ равно максимальному сингулярному числу ортогональной проекции $\pi : U \to W$ вдоль $W^\perp$. Минимальный угол $\measuredangle(u, w)$ между ненулевыми векторами $u \in U$, $w \in W$ достигается на сингулярном направлении u_1 проекции π с максимальным коэффициентом растяжения α_1 и его ортогональной проекции $\pi(u_1)$.

Доказательство. Достаточно доказать второе утверждение, первое является его переформулировкой. Пусть ортонормальные базисы $u_1, \dots, u_n \in U$ и $w_1, \dots, w_m \in W$ таковы, что

$$\pi u_i = \alpha_i w_i \quad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Так как $u_i = w_i + w_i'$ для некоторых векторов $w_1', \dots, w_n' \in W^\perp$, мы имеем при всех $i \neq j$ соотношения ортогональности $(u_i, w_j) = 0$, из которых в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца[1] вытекает, что для любых $u = \sum x_i u_i$ и $w = \sum y_j w_j$ длины $|u| = |w| = 1$

$$(u, w) = \sum_{i=1}^n x_i y_i\,(u_i, w_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, x_i y_i \leqslant \sqrt{\alpha_1^2 x_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1 \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \leqslant \alpha_1\,|u|\,|w| = \alpha_1 = (u_1, w_1)\,.$$

□

Упражнение 11.9. Выведите существование минимального угла между ненулевыми векторами $u \in U$, $w \in W$ из компактности сферы и непрерывности скалярного произведения.

Пример 11.8 (явные формулы для инвариантных углов)

Если в пространствах $U, W \subset \mathbb{R}^k$ заданы (не обязательно ортонормальные) базисы

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n) = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{eu}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m) = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ew}}\,,$$

[1] См. прим. 3.2 на стр. 34.

где $\boldsymbol{e}$ — стандартный ортонормальный базис в $\mathbb{R}^k$, то набор ортогональных проекций

$$\boldsymbol{u}_W = (u_{1W}, \dots, u_{nW})$$

базисных векторов пространства U на пространство W выражается через базис $\boldsymbol{w}$ по формуле[1] $\boldsymbol{u}_W = \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{w}^{\times t} \cdot \boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{w}\, G_{\boldsymbol{w}}^{-1} G_{\boldsymbol{wu}}$, где $G_{\boldsymbol{wu}} = C_{\boldsymbol{ew}}^t C_{\boldsymbol{eu}}$ — взаимная матрица Грама[2] наборов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{u}$. Таким образом, проектор $\pi : U \to W$ имеет в базисах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ матрицу

$$\Pi_{\boldsymbol{wu}} = G_{\boldsymbol{w}}^{-1} G_{\boldsymbol{wu}} = G_{\boldsymbol{w}}^{-1} C_{\boldsymbol{ew}}^t C_{\boldsymbol{eu}}\,.$$

Согласно форм. (11-5) на стр. 145 евклидово сопряжённый к нему оператор имеет в тех же базисах матрицу $\Pi_{\boldsymbol{uw}}^{\times} = G_{\boldsymbol{u}}^{-1} \Pi_{\boldsymbol{wu}}^t G_{\boldsymbol{w}} = G_{\boldsymbol{u}}^{-1} G_{\boldsymbol{wu}}^t = G_{\boldsymbol{u}}^{-1} G_{\boldsymbol{uw}}$. Тем самым, квадраты косинусов инвариантных углов $\measuredangle(U, W)$ суть собственные числа симметричной матрицы

$$\Pi_{\boldsymbol{uw}}^{\times} \Pi_{\boldsymbol{wu}} = G_{\boldsymbol{u}}^{-1} G_{\boldsymbol{uw}} G_{\boldsymbol{w}}^{-1} G_{\boldsymbol{wu}} = G_{\boldsymbol{u}^{\times}\boldsymbol{w}^{\times}} G_{\boldsymbol{wu}}\,.$$

Пример 11.9 (индуктивное геометрическое описание инвариантных углов)
Ортонормальные базис $u_1, \dots, u_n$ в U и набор векторов $w_1, \dots, w_n$ в W, такие что

$$\measuredangle(U, W) = \left(\measuredangle(u_1, w_1), \dots, \measuredangle(u_n, w_n)\right),$$

можно получить следующим образом. Сначала выберем произвольный ортонормальный базис $u_1, \dots, u_i$ в пересечении $U \cap W$ и положим $w_\nu = u_\nu$ при $\nu \leqslant i$. Далее рассмотрим пространства $V_i = (U \cap W)^\perp$, $U_i = U \cap V_i$ и $W_i = W \cap V_i$. По предл. 11.3 (или по упр. 11.9) угол $\measuredangle(u, w)$ между ненулевыми векторами $u \in U_i$, $w \in W_i$ достигает минимума на некоторой паре векторов u_{i+1}, w_{i+1} единичной длины. Добавим эти векторы к уже построенным наборам $u_1, \dots, u_i$ и $w_1, \dots, w_i$. Теперь обозначаем через $V_{i+1} \subset V_i$ ортогональное дополнение к плоскости, порождённой векторами u_{i+1}, w_{i+1}, полагаем $U_{i+1} = U_i \cap V_{i+1}$, $W_{i+1} = W_i \cap V_{i+1}$ и повторяем процедуру.

Предложение 11.4
Пара векторных подпространств U', W' евклидова пространства тогда и только тогда переводится ортогональным линейным преобразованием в пару подпространств U'', W'', когда

$$\dim U' = \dim U''\,, \quad \dim W' = \dim W'' \quad \text{и} \quad \measuredangle(U', W') = \measuredangle(U'', W'') \tag{11-7}$$

Доказательство. Необходимость равенств (11-7) очевидна. Если они выполняются, то

$$\dim(U' \cap W') = \dim(U'' \cap W'') \quad \text{и} \quad \dim(U' + W') = \dim(U'' + W'')\,,$$

первое — в силу того, что $\dim(U \cap W)$ совпадает с количеством равных единице сингулярных чисел ортогональной проекции $\pi : U \to W$, второе — по предл. 4.2 на стр. 52. Поэтому существует такое ортогональное преобразование g объемлющего евклидова пространства, что $g(U' + W') = U'' + W''$, $g(U' \cap W') = U'' \cap W''$ и $g(W') = W''$. Тем самым, можно считать, что

[1]Как и выше, точкой обозначается произведение матриц *из векторов*, при вычислении которого векторы перемножаются скалярно. Обратите внимание, что левое произведение в формуле $\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{w}^{\times t} \cdot \boldsymbol{u}\right)$ это произведение матрицы из векторов на *числовую* матрицу $\boldsymbol{w}^{\times t} \cdot \boldsymbol{u}$, и его не следует путать со скалярным произведением матриц из векторов: равенство «$\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{w}^{\times t} \cdot \boldsymbol{u}\right) = \left(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}^{\times t}\right) \boldsymbol{u}$» категорически неверно!

[2]См. формулу (10-5) на стр. 132.

$W' = W'' = W$, а объемлющее евклидово пространство совпадает с суммой $W + U' = W + U''$, причём $W \cap U' = W \cap U''$. Обозначая последнее пересечение через V мы можем заменить объемлющее пространство на $V^\perp$, а подпространства W, U', U'' — их пересечениями с $V^\perp$. Таким образом, можно без ограничения общности считать, что объемлющее пространство имеет вид $W \oplus W^\perp$, где $W = W' = W''$, а подпространства U' и U'' имеют нулевое пересечение с W и $\dim U' = \dim U'' = \dim W^\perp$. В этом случае оба подпространства U' и U'' изоморфно проектируются на $W^\perp$ вдоль W. Выберем в U' и U'' ортонормальные базисы из таких векторов

$$u_i' = \alpha_i w_i' + v_i' \quad \text{и} \quad u_i'' = \alpha_i w_i'' + v_i'' , \quad \text{где} \quad v_i', v_i'' \in W^\perp , \tag{11-8}$$

что векторы w_i' и w_i'' образуют ортонормальные системы в W. Дополним эти ортонормальные системы до ортонормальных базисов $\boldsymbol{w}'$ и $\boldsymbol{w}''$ в W. Набор $\boldsymbol{v}'$ векторов v_i' и набор $\boldsymbol{v}''$ векторов v_i'' в (11-8) оба являются (возможно, не ортонормальными) базисами в $W^\perp$. Обозначим через $f \in \mathrm{End}(W \oplus W^\perp)$ линейный оператор, переводящий базисы $\boldsymbol{w}'$ и $\boldsymbol{v}'$ соответственно в базисы $\boldsymbol{w}''$ и $\boldsymbol{v}''$. Тогда $f(U') = U''$. Покажем, что f сохраняет скалярные произведения. Для этого достаточно убедиться, что базисы $\boldsymbol{v}'$ и $\boldsymbol{v}''$ имеют одинаковые матрицы Грама. Это действительно так, поскольку из равенств $(u_i', w_i') = \alpha_i = (u_i'', w_i'')$ и $(u_i', w_j') = 0 = (u_i'', w_j'')$ вытекает, что как векторы $v_i' = u_i' - \alpha_i w_i'$, так и векторы $v_i'' = u_i'' - \alpha_i w_i''$ ортогональны и имеют скалярные квадраты $(v_i', v_i') = (v_i'', v_i'') = 1 - \alpha_i$. □

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 11.1. Ортогональный оператор F переводит базисный вектор e в вектор $Fe = \lambda e$ $\lambda \in \mathbb{R}$, и

$$(e, e) = (Fe, Fe) = \lambda^2 = (e, e)\,,$$

откуда $\lambda = \pm 1$.

Упр. 11.2. Так как $(a + b, a - b) = (a, a) - (b, b) = 0$, вектор $(a + b)/2 \in (a - b)^{\perp}$. Поскольку

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad \text{и} \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\,, \tag{12-12}$$

для любого вектора $w \in (a - b)^{\perp}$ выполняются равенства $(w, a) = \big(w, (a + b)/2\big) = (w, b)$. Поэтому векторы a и b ортогонально проектируются на гиперплоскость $(a - b)^{\perp}$ в один и тот же вектор $(a+b)/2$, а равенства (12-12) дают ортогональные разложения векторов a и b в сумме $V = (a - b)^{\perp} \oplus \mathbb{R} \cdot (a - b)$.

Упр. 11.3. Рассматриваемый поворот плоскости U является композицией отражений относительно прямых $u_1^{\perp} \cap U$ и $u_2^{\perp} \cap U$.

Упр. 11.4. Если $Fu = \lambda u$ для ненулевого вектора u, то из равенства $(Fu, u) = -(u, Fu)$ вытекает равенство $2\lambda \cdot (u, u) = 0$, возможное только при $\lambda = 0$.

Упр. 11.6. $(u+v, u+v) = (u, u)+2(u, v)+o(|u|)$, $(F(u+v), F(u+v)) = (Fu, Fu)+2(Fu, Fv)+o(|u|)$.

Упр. 11.7. Так как оператор $FF^{\times}$ самосопряжён и биективен, все его собственные числа строго положительны. Поэтому имеется единственный самосопряжённый оператор S с положительными собственными значениями, квадрат которого равен[1] $FF^{\times}$. Тогда $F = SR$, где $R = S^{-1}F$ ортогонален, поскольку $R^{\times}R = R^{\times}S^{-2}F = F^{x}(FF^{\times})^{-1}F = \mathrm{Id}_V$.

Упр. 11.9. Поскольку произведение двух компактов компактно, а функция (u, w) непрерывна, она достигает максимума на декартовом произведении единичных сфер в U и W.

[1]Так как S и S^2 диагонализуются в одном базисе, оператор S обязан действовать на каждом собственном подпространстве V_λ оператора S^2 умножением на положительный $\sqrt{\lambda}$.