§9. Линейные операторы

9.1. Пространство с оператором. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле, V — конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$, а $F : V \to V$ — линейный эндоморфизм пространства V. Мы будем называть пару (F, V) *пространством с оператором* или просто *линейным оператором* над $\Bbbk$. Линейное отображение $C : U_1 \to U_2$ между пространствами с операторами (F_1, U_1) и (F_2, U_2) называется *гомоморфизмом*, если $F_2 \circ C = C \circ F_1$, т. е. диаграмма линейных отображений

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "C"] & U_2 \\ U_1 \arrow[u, "F_1"] \arrow[r, "C"'] & U_2 \arrow[u, "F_2"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна[1]. Если при этом отображение C биективно, операторы F_1 и F_2 называются *изоморфными* или *подобными*. Таким образом, подобие операторов F_1 и F_2 означает равенство

$$F_2 = CF_1C^{-1}$$

для некоторого обратимого линейного отображения C. В этой ситуации также говорят, что F_2 получается из F_1 *сопряжением* посредством C.

Подпространство $U \subset V$ называется F-*инвариантным*, если $F(U) \subset U$. В этой ситуации пара $(F|_U, U)$ тоже является пространством с оператором и вложение $U \hookrightarrow V$ является гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

Упражнение 9.1. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ неприводим.

Оператор $F : V \to V$ называется *разложимым*, если пространство V можно разложить в прямую сумму двух ненулевых F-инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Если оператор неприводим, то он и неразложим. Обратное неверно:

Упражнение 9.2. Покажите, что при всех $n \geqslant 1$ оператор умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/(t^n)$ приводим, но неразложим.

Таким образом, над любым полем $\Bbbk$ имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности, и они могут быть приводимы. Каждое конечномерное разложимое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых инвариантных подпространств.

Упражнение 9.3. Покажите, что двойственные операторы[2] $F : V \to V$, $F^* : V^* \to V^*$ либо оба разложимы, либо оба неразложимы.

Замечание 9.1. (классификация пространств с оператором) Над произвольным полем $\Bbbk$ каждое конечномерное неразложимое пространство с оператором изоморфно оператору умножения на класс $[t]$ в кольце вычетов $\Bbbk[t]/(p^m)$, где $p \in \Bbbk[t]$ — неприводимый приведённый многочлен, а $m \in \mathbb{N}$, и все такие пространства не изоморфны друг другу при разных p или m. Пространство $\Bbbk[t]/(p^m)$ неприводимо если и только если $m = 1$. Произвольное пространство с оператором изоморфно оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец вида[3]

---

[1] Диаграмма отображений между множествами называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы.

[2] См. n° 7.3 на стр. 88.

[3] В сумме допускаются повторяющиеся слагаемые.

$\Bbbk[t]/(p^m)$, и такое представление пространства с оператором единственно с точностью до перестановки слагаемых. Доказательства всех этих фактов обычно даются в курсе алгебры[1]. Мы не собираемся использовать данную классификацию в полной общности, а все её следствия, которые нам понадобятся, будут независимо установлены нами по мере необходимости.

9.1.1. Характеристический многочлен. Пусть оператор $F : V \to V$ имеет матрицу $F_{\boldsymbol{v}}$ в каком либо базисе $\boldsymbol{v}$ пространства V. Её характеристический многочлен $\det(tE - F_{\boldsymbol{v}})$ называется *характеристическим многочленом* оператора F и обозначается $\chi_F(t)$. Он не зависит от выбора базиса, в котором пишется матрица оператора, поскольку в любом другом базисе $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\,C_{\boldsymbol{vw}}$ матрица[2] $F_{\boldsymbol{w}} = C_{\boldsymbol{wv}}F_{\boldsymbol{v}}C_{\boldsymbol{vw}} = C_{\boldsymbol{wv}}F_{\boldsymbol{v}}C_{\boldsymbol{wv}}^{-1}$ подобна матрице $F_{\boldsymbol{v}}$, а любые две подобные матрицы F и $G = CFC^{-1}$ имеют равные характеристические многочлены:

$$\chi_G(t) = \det(tE - G) = \det(tCEC^{-1} - CFC^{-1}) = \det\big(C(tE - F)C^{-1}\big) = \\ = \det C \cdot \det(tE - F) \cdot \det{}^{-1} C = \det(tE - F) = \chi_F(t)\,.$$

В частности, подобные операторы тоже имеют равные характеристические многочлены.

Упражнение 9.4. Для любого многочлена $f \in \Bbbk[t]$ со старшим коэффициентом 1 покажите, что характеристический многочлен оператора умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/(f)$ равен f.

Пример 9.1 (характеристический многочлен разложимого оператора)
Пусть пространство с оператором (F, V) является прямой суммой пространств с операторами (G, U) и (H, W). Тогда $\chi_F(t) = \chi_G(t) \cdot \chi_H(t)$, поскольку в любом базисе, согласованном с разложением $V = U \oplus W$, матрица оператора $tE - F$ имеет блочный вид $\begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}$, и результат вытекает из упр. 8.13 на стр. 113.

9.1.2. Аннулирующие многочлены. Линейный оператор $F : V \to V$, действующий в векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$, можно подставить вместо переменной t в любой многочлен $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m \in \Bbbk[t]$. Результатом такой подстановки является линейный оператор $f(F) \overset{\text{def}}{=} a_0\mathrm{Id}_V + a_1F + \dots + a_mF^m \in \mathrm{End}(V)$. Подстановка фиксированного оператора $F \in \mathrm{End}\,V$ во всевозможные многочлены задаёт гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\mathrm{ev}_F : \Bbbk[t] \to \mathrm{End}(V)\,, \quad f \mapsto f(F)\,,$$

который называется *гомоморфизмом вычисления* многочленов на операторе F. Многочлены, лежащие в ядре этого гомоморфизма, т. е. такие $f \in \Bbbk[t]$, что $f(F) = 0$, называются *аннулирующими* оператор F. Если $\dim V < \infty$, алгебра $\mathrm{End}\,V$ конечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$, а алгебра $\Bbbk[t]$ бесконечномерна. Поэтому $\ker \mathrm{ev}_F \neq 0$, т. е. любой оператор на конечномерном пространстве аннулируется некоторым ненулевым многочленом. В силу тождества Гамильтона – Кэли[3] примером такого многочлена является характеристический многочлен $\chi_F(t)$.

[1] Например, см. лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_09.pdf и http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_10.pdf моего курса алгебры http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/list.html.

[2] См. формулу (5-15) на стр. 65.

[3] См. n° 8.2.1 на стр. 103.

Поскольку все идеалы[1] кольца $\Bbbk[t]$ главные[2], идеал $\ker \mathrm{ev}_F = (\mu_F)$ состоит из всех многочленов, делящихся на некоторый многочлен μ_F, который однозначно задаётся как ненулевой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, такой что $\mu_F(F) = 0$ в $\mathrm{End}(V)$.

Упражнение 9.5 (по алгебре). Убедитесь в этом.

Многочлен $\mu_F(t)$ называется *минимальным многочленом* оператора F.

Пример 9.2 (отыскание минимального многочлена)
Для каждого вектора $v \in V$ и линейного оператора $F : V \to V$ существует такой приведённый многочлен наименьшей степени от оператора F, который аннулирует вектор v. Чтобы написать его явно, надо найти наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$, что вектор $F^k v$ линейно выражается через векторы $v, Fv, \dots, F^{k-1}v$. Если это выражение имеет вид $F^k v = \mu_1 F^{k-1} v + \dots + \mu_{k-1} F v + \mu_k v$, то искомый многочлен $\mu_{v,F}(t) = t^k - \mu_1 t^{k-1} - \dots - \mu_{k-1} t - \mu_k$.

Упражнение 9.6. Убедитесь, что любой аннулирующий оператор F многочлен делится на все многочлены $\mu_{v,F}$, где $v \in V$.

Таким образом, минимальный многочлен μ_F оператора F представляет собою наименьшее общее кратное многочленов $\mu_{v,F}$ по всем $v \in V$. Очевидно, что для отыскания этого наименьшего общего кратного достаточно ограничиться только векторами v из некоторого базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства V.

Упражнение 9.7. Убедитесь в этом.

Вычислим, к примеру, минимальный многочлен оператора $F : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, заданного в стандартном базисе $e_1, \dots, e_4$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Векторы[3]

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Fe_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F^2 e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Чтобы выяснить, выражается ли через них вектор[4]

$$F^3 e_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix},$$

[1]См. начало лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-05.pdf.
[2]См. Предложение 5.1 на стр. 74 той же лекции.
[3]Векторы Fe_1 и F^2e_1 суть первые столбцы матриц A и A^2.
[4]Это первый столбец матрицы A^3.

необходимо решить неоднородную систему с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса преобразуем эту матрицу к приведённому ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

и получаем решение $(-4, 4, 1)$, т. е. $F^3 e_1 = -4e_1 + 4Fe_1 + F^2 e_1$. Таким образом, минимальный многочлен от оператора F, аннулирующий вектор e_1, равен $F^3 - F^2 - 4F + 4E$. Вычисляя

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 9 & 9 \\ 16 & 24 & -16 & -16 \\ 7 & 14 & -6 & -7 \\ 9 & 9 & -9 & -8 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что $A^3 - A^2 - 4A + 4E = 0$. Тем самым, $\mu_F = t^3 - t^2 - 4t + 4$.

Теорема 9.1 (теорема о разложении)
Пусть линейный оператор $F : V \to V$ на произвольном[1] векторном пространстве V над любым полем $\Bbbk$ аннулируется многочленом $q \in \Bbbk[t]$, который раскладывается в $\Bbbk[t]$ в произведение $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_r$ попарно взаимно простых многочленов $q_i \in \Bbbk[t]$. Положим $Q_j = q/q_j$. Тогда $\ker q_j(F) = \operatorname{im} Q_j(F)$ для каждого j, все эти подпространства F-инвариантны, и пространство V является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Так как $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$, имеем включение $\operatorname{im} Q_i(F) \subset \ker q_i(F)$. Поэтому достаточно показать, что V линейно порождается образами операторов $Q_i(F)$, а сумма ядер $\ker q_i(F)$ прямая[2], т. е. $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$ для всех i. Первое вытекает из того, что нод$(Q_1, \dots, Q_r) = 1$, а значит, существуют такие $h_1, \dots, h_r \in \Bbbk[t]$, что $1 = \sum Q_j(t) h_j(t)$. Подставляя в это равенство $t = F$ и применяя обе части к произвольному вектору $v \in V$, получаем разложение $v = Ev = \sum Q_j(F) h_j(F) v \in \sum \operatorname{im} Q_j(F)$. Второе вытекает из взаимной простоты q_i и Q_i, в силу которой существуют такие $g, h \in \Bbbk[t]$, что $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$. Подставим сюда $t = F$ и применим обе части полученного равенства $E = g(F)\, q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$ к произвольному вектору $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$. Так как $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$ при всех $j \neq i$, получим $v = Ev = g(F)\, q_i(F)\, v + h(F)\, Q_i(F)\, v = 0$, что и требовалось. □

Пример 9.3 (проекторы)
Линейный оператор $\pi : V \to V$ называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом $t^2 - t = t(t-1)$, т. е. удовлетворяет соотношению $\pi^2 = \pi$. По теор. 9.1 образ любого идемпотента $\pi : V \to V$ совпадает с подпространством его неподвижных векторов: $\operatorname{im} \pi = \ker(\pi - \mathrm{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$, и всё пространство распадается в прямую сумму

[1] Возможно даже бесконечномерном.
[2] См. опр. 4.1 и предл. 4.1 на стр. 51.

$V = \ker\pi \oplus \operatorname{im}\pi$. Тем самым, оператор π проектирует V на $\operatorname{im}\pi$ вдоль $\ker\pi$. Отметим, что оператор $\mathrm{Id}_V - \pi$ тоже является идемпотентом и проектирует V на $\ker\pi$ вдоль $\operatorname{im}\pi$. Таким образом, задание прямого разложения $V = U \oplus W$ равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов $\pi_1 = \pi_1^2$ и $\pi_2 = \pi_2^2$ пространства V, связанных соотношениями $\pi_1 + \pi_2 = 1$ и $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$.

Упражнение 9.8. Выведите из этих соотношений, что $\ker\pi_1 = \operatorname{im}\pi_2$ и $\operatorname{im}\pi_1 = \ker\pi_2$.

Пример 9.4 (инволюции)
Линейный оператор $\sigma : V \to V$ называется *инволюцией*, если $\sigma^2 = \mathrm{Id}_V$. Тождественная инволюция $\sigma = \mathrm{Id}_V$ называется *тривиальной*. Если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, то аннулирующий инволюцию σ многочлен $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$ является произведением различных линейных множителей. Поэтому над таким полем $V = V_+ \oplus V_-$, где

$$V_+ = \ker(\sigma - E) = \operatorname{im}(\sigma + \mathrm{Id}_V) = \{v \in V \mid \sigma v = v\}$$
$$V_- = \ker(\sigma + E) = \operatorname{im}(\sigma - \mathrm{Id}_V) = \{v \in V \mid \sigma v = -v\}\,.$$

Произвольный вектор $v = v_+ + v_-$ пространства V имеет в этом разложении компоненты

$$v_+ = \frac{v + \sigma v}{2} \in V_+ \quad \text{и} \quad v_- = \frac{v - \sigma v}{2} \in V_-\,.$$

9.2. Собственные подпространства. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* линейного оператора $F : V \to V$ если $F(v) = \lambda v$ для некоторого числа $\lambda \in \Bbbk$. Это число называется *собственным значением* или *собственным числом* оператора F на собственном векторе v. Собственные векторы с заданным собственным числом λ образуют вместе с нулевым вектором F-инвариантное подпространство

$$V_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda\,\mathrm{Id}_V - F)\,, \tag{9-1}$$

которое называется *собственным подпространством* оператора F. Поскольку $\ker(\lambda\,\mathrm{Id}_V - F) \neq 0$ если и только если $\det(\lambda\,\mathrm{Id}_V - F) = \chi_F(\lambda) = 0$, подпространство (9-1) отлично от нуля тогда и только тогда, когда число λ является корнем характеристического многочлена оператора F. Таким образом, множество собственных чисел оператора F есть множество корней многочлена χ_F в поле $\Bbbk$. Оно называется *спектром* оператора F в поле $\Bbbk$ и обозначается $\operatorname{Spec}(F)$ или $\operatorname{Spec}_{\Bbbk}(F)$, если важно явно указать поле. Так как $\deg\chi_F = \dim V$, количество различных собственных чисел не превышает размерности пространства: $|\operatorname{Spec}(F)| \leqslant \dim V$. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ спектр всегда не пуст.

Предложение 9.1
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждый линейный оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством. □

Предложение 9.2
Множество корней любого многочлена, аннулирующего оператор F, содержит $\operatorname{Spec} F$.

Доказательство. Ограничение оператора F на собственное подпространство V_λ является гомотетией с коэффициентом λ. Поэтому для любого многочлена $g \in \Bbbk[t]$ оператор $g(F)$ действует на V_λ как гомотетия с коэффициентом $g(\lambda)$. Если $g(\lambda) \neq 0$, то $g(F)|_{V_\lambda} \neq 0$. □

Предложение 9.3
Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

Доказательство. Пусть собственные векторы $e_1, \dots, e_m$ имеют попарно разные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и линейно зависимы. Рассмотрим зависимость, содержащую минимально возможное число векторов, и перенумеруем их так, чтобы это были $e_1, \dots, e_k$. Тогда $k \geqslant 2$ и

$$e_k = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{k-1} e_{k-1},$$

где все $x_i \in \Bbbk$ отличны от нуля. При этом $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$. Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на λ_k, получаем более короткую линейную зависимость $0 = x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_1 + x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_2 + \cdots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot e_{k-1}$ с ненулевыми коэффициентами. Противоречие. □

Следствие 9.1
Сумма собственных подпространств с разными собственными числами является прямой. □

Следствие 9.2
$\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} \dim V_\lambda \leqslant \dim V$.

Упражнение 9.9. Приведите пример оператора, для которого это неравенство строгое.

9.2.1. Диагонализуемые операторы. Оператор $F : V \to V$ называется *диагонализуемым*, если в V имеется базис, в котором F записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора F, и элементы диагональной матрицы являются собственными значениями оператора F, причём каждое число $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$ и какова размерность собственного подпространства V_λ. Таким образом, с точностью до перестановки диагональных элементов диагональная матрица диагонализуемого оператора F не зависит от выбора базиса, в котором оператор F имеет диагональную матрицу.

Предложение 9.4
Следующие свойства оператора $F : V \to V$ эквивалентны:

1) F диагонализуем

2) пространство V линейно порождается собственными векторами оператора F

3) характеристический многочлен $\chi_F(t)$ полностью раскладывается на линейные множители в $\Bbbk[t]$, и кратность каждого корня λ многочлена χ_F равна размерности собственного подпространства V_λ

4) оператор F аннулируется многочленом, который полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на попарно различные линейные множители.

Доказательство. Эквивалентность свойств (1) и (2), а также импликация (1) ⇒ (3) очевидны. Покажем, что (3) ⇒ (1). Из (3) вытекает, что $\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$. Поэтому $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} V_\lambda$ в силу сл. 9.1. Теперь покажем, что (3) ⇒ (4). Так как каждое собственное подпространство V_λ аннулируется оператором $(F-\lambda\mathrm{Id}_V)$, всё пространство V аннулируется композицией $\prod_{\lambda\in\mathrm{Spec}\,F}(F-\lambda\mathrm{Id}_V)$, т. е. оператор F аннулируется многочленом $\prod_{\lambda\in\mathrm{Spec}\,F}(t-\lambda)$, что и утверждается в (4). Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) следует из теоремы разложения[1]: если оператор F аннулируется произведением $\prod_\mu(t-\mu)$, в котором μ пробегает без повторений некоторое конечное подмножество в $\Bbbk$, то V является прямой суммой тех подпространств $\ker(F-\mu\mathrm{Id})$, которые отличны от нуля, т. е. собственных подпространств оператора F. □

Следствие 9.3
Если оператор $F: V\to V$ диагонализуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагонализуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (4) предл. 9.4. □

9.2.2. Перестановочные операторы. Если линейные операторы $F,G: V\to V$ на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена от оператора F переводятся оператором G в себя, поскольку

$$\begin{aligned} f(F)\,v=0 \quad&\Rightarrow\quad f(F)\,G\,v=G\,f(F)\,v=0\\ v=f(F)\,w \quad&\Rightarrow\quad Gv=G\,f(F)\,w=f(F)\,Gw\,. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства $V_\lambda=\ker(F-\lambda E)$ инвариантны относительно любого перестановочного с F оператора G.

Предложение 9.5
В конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов можно одновременно диагонализовать в одном общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если все операторы скалярны (что так при $\dim V=1$), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескалярный оператор F, то над замкнутым полем у него есть ненулевое собственное подпространство строго меньшей, чем V размерности, а в диагонализуемом случае V является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора F инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора F останутся диагонализуемы по сл. 9.3. Применяя к собственному подпространству (а в диагонализуемом случае — ко всем собственным подпространствам) оператора F предположение индукции, получаем требуемое. □

Пример 9.5 (конечные группы операторов)
Если m линейных операторов на конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}\,\Bbbk>m$ образуют группу G, то каждый из этих операторов аннулируется многочленом[2] t^m-1, который раскладывается в произведение m попарно различных

[1] См. теор. 9.1 на стр. 118.

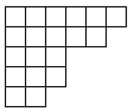
[2] Поскольку порядок любого элемента конечной группы делит порядок этой группы, см. раздел 11.1.1 на стр. 149 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_11.pdf.

линейных множителей[1]. Поэтому каждый оператор в группе G диагонализуем. Все операторы из группы G одновременно диагонализуются в одном общем базисе если и только если группа G абелева.

9.3. Нильпотентные операторы. Оператор $F : V \to V$ называется *нильпотентным*, если он аннулируется многочленом вида t^m, т. е. если $F^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Поскольку минимальный многочлен оператора F является делителем t^m и имеет степень не больше степени характеристического многочлена, которая равна $\dim V$, в определении нильпотентного оператора можно без ограничения общности считать, что $m \leqslant \dim V$.

Упражнение 9.10. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ оператор F нильпотентен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Spec} F = \{0\}$.

Определение 9.1 (жорданов базис нильпотентного оператора)
Базис пространства V с нильпотентным оператором $F : V \to V$ называется *циклическим* (или *жордановым*), если его векторы можно расставить в клетки некоторой диаграммы Юнга ν так, чтобы F аннулировал все векторы самого левого столбца и переводил каждый из оставшихся векторов в соседний слева:



$$\leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{l} 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \end{array} \tag{9-2}$$

Диаграмма (9-2) называется *цикловым типом* жорданова базиса. Цепочки базисных векторов, расположенные в её строках, называются *жордановыми цепочками*. Таким образом, матрица нильпотентного оператора в жордановом базисе состоит из расположенных вдоль главной диагонали квадратных блоков вида

$$J_m(0) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad m \in \mathbb{N} \text{ — размер блока,} \tag{9-3}$$

которые биективно соответствуют строкам диаграммы (9-2) и имеют размеры, равные длинам соответствующих строк. Все остальные элементы матрицы нулевые.

Теорема 9.2
Каждый нильпотентный оператор F на конечномерном векторном пространстве $V \neq 0$ обладает жордановым базисом. Все жордановы базисы оператора F имеют одинаковый цикловой тип[2], причём j-й слева столбец диаграммы (9-2) состоит из $\dim\ker F^j - \dim\ker F^{j-1}$ клеток.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $F = 0$ (что так при $\dim V = 1$), то любой базис в V является жордановым, и диаграмма Юнга (9-2) представляет собою один столбец высоты $\dim V$.

[1]Так как производная mt^{m-1} многочлена $t^m - 1$ отлична от нуля и взаимно проста с этим многочленом, она не имеет с ним общих корней. Следовательно, у многочлена нет кратных корней. См. раздел 3.3.2 на стр. 39 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_03.pdf.

[2]Он называется *цикловым типом* оператора F и обозначается $\nu(F)$.

Если $\dim V > 1$ и $F \neq 0$, то подпространство $\ker F \subset V$ отлично от нуля и от V. Поэтому фактор $W = V/\ker F$ является ненулевым векторном пространством размерности строго меньшей, чем V. Оператор F корректно факторизуется до нильпотентного оператора

$$F_W : W \to W\,, \quad [v] \mapsto [Fv]\,.$$

Упражнение 9.11. Убедитесь в этом.

По предположению индукции, в пространстве V существуют векторы $w_1, \dots, w_m$, классы которых $[w_1], \dots, [w_m]$ по модулю $\ker F$ образуют жорданов базис оператора F_W. Образы этих векторов $F(w_1), \dots, F(w_m)$ линейно независимы в V, поскольку равенство

$$0 = \lambda_1 F(w_1) + \dots + \lambda_m F(w_m) = F(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m)$$

означает, что $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m \in \ker F$, т. е. $\lambda_1[w_1] + \dots + \lambda_m[w_m] = [0]$ в $W = V/\ker F$, что возможно лишь если все $\lambda_i = 0$. Пусть классы $[w_1], \dots, [w_s]$ составляют первый столбец диаграммы (9-2) для оператора F_W. Тогда векторы $F(w_1), \dots, F(w_s)$ лежат в $\ker F$ и линейно независимы. Дополняя их векторами $u_1, \dots, u_r$ до базиса в $\ker F$, получаем жорданов базис

$$u_1, \dots, u_r, F(w_1), \dots, F(w_s), w_1, \dots, w_m$$

для исходного оператора $F : V \to V$.

Упражнение 9.12. Убедитесь в этом.

Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что жордановы базисные векторы, стоящие в первых j столбцах диаграммы (9-2) для оператора F, составляют базис в $\ker F^j$. □

9.4. Корневое разложение и функции от операторов. Для заданных числа $\lambda \in \Bbbk$ и линейного оператора $F : V \to V$ множество

$$K_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists\, m \in \mathbb{N} : (\lambda \operatorname{Id} - F)^m v = 0\} = \bigcup_{m \geqslant 1} \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^m \tag{9-4}$$

называется *корневым подпространством* оператора F.

Упражнение 9.13. Убедитесь, что $K_\lambda \subset V$ действительно является векторным подпространством и отлично от нуля если и только если $\lambda \in \operatorname{Spec} F$.

Для каждого $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ имеется включение $V_\lambda \subseteq K_\lambda$, которое может быть как строгим, так и равенством. Из тождества Гамильтона – Кэли[1] и теоремы разложении[2] вытекает

Следствие 9.4 (теорема о корневом разложении)
Пусть характеристический многочлен $\chi_F(t)$ линейного оператора $F : V \to V$ на конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ полностью разлагается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители: $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$. Тогда $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda$ и $K_\lambda = \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^{m_\lambda}$ для всех $\lambda \in \operatorname{Spec} F$.

Доказательство. Разложение $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$ удовлетворяет условиям теор. 9.1 на стр. 118 для $q_i = (t - \lambda)^{m_\lambda}$, откуда $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^{m_\lambda}$. □

[1] См. n° 8.2.1 на стр. 103.
[2] См. теор. 9.1 на стр. 118.

9.4.1. Функции от операторов. Пусть линейный оператор F действует на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, которое мы обозначим через $\mathbb{K}$. Всюду далее мы предполагаем, что F аннулируется многочленом $\alpha(t) \in \mathbb{K}[t]$, который полностью разлагается над $\mathbb{K}$ на линейные множители, т. е.

$$\alpha(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2} \cdots (t-\lambda_s)^{m_s}, \tag{9-5}$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и все $m_i \in \mathbb{N}$. Мы полагаем $m = \deg\alpha = m_1 + \dots + m_s$. Алгебра $\mathcal{A}$, состоящая из функций $U \to \mathbb{K}$, заданных на каком-нибудь подмножестве $U \subset \mathbb{K}$, содержащем все корни многочлена (9-5), называется *алгебраически вычислимой* на операторе F, если $\mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ и для каждого корня λ кратности k многочлена (9-5) все функции $f \in \mathcal{A}$ определены в точке $\lambda \in \mathbb{K}$ вместе с первыми $k-1$ производными $f^{(\nu)} = \frac{d^\nu f}{dt^\nu}$ и допускают разложение вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t-\lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(t-\lambda)^{k-1} + g_\lambda(t)\cdot(t-\lambda)^k, \tag{9-6}$$

где функция $g_\lambda(t)$ тоже лежит в алгебре $\mathcal{A}$.

Если характеристический многочлен $\chi_F(t)$ полностью разлагается в $\mathbb{K}[t]$ на линейные множители, можно положить $\alpha(t) = \chi_F(t)$. Алгебра $\mathcal{A}$ всех функций, определённых в ε-окрестности каждого собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и представимых в ней суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от $(t-\lambda)$, алгебраически вычислима на операторе F. Подалгебра в $\mathcal{A}$, состоящая из всех аналитических функций[1] $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, алгебраически вычислима на всех линейных операторах $F \in \operatorname{End}(V)$, характеристические многочлены которых полностью разлагаются на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$.

Теорема 9.3

В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе $F : V \to V$ алгебра функций $\mathcal{A}$ допускает единственный такой гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр $\operatorname{ev}_F : \mathcal{A} \to \operatorname{End} V$, что $\operatorname{ev}_F(p) = p(F)$ для всех многочленов $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$.

Определение 9.2 (гомоморфизм вычисления)

Гомоморфизм $\operatorname{ev}_F : \mathcal{A} \to \operatorname{End} V$ из теор. 9.3 называется *вычислением* функций $f \in \mathcal{A}$ на операторе F. Линейный оператор $\operatorname{ev}_F(f) : V \to V$, в который переходит функция $f \in \mathcal{A}$ при гомоморфизме вычисления, обозначается $f(F)$ и называется *функцией f от оператора F*.

Замечание 9.2. (как относиться к функциям от операторов) Из теор. 9.3 вытекает, что для любого оператора $F \in \operatorname{End}(V)$, характеристический многочлен которого полностью разлагается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, определены такие аналитические функции, как e^F или $\sin F$, а если $F \in \operatorname{GL}(V)$, то и такие аналитические вне нуля функции, как $\ln F$ или $\sqrt{F}$, причём алгебраические свойства соответствующих операторов $f(F)$ в алгебре $\operatorname{End} V$ будут точно такими же, как у числовых функций e^t, $\sin t$, $\ln t$ и $\sqrt{t}$. В частности, все эти функции от оператора F коммутируют друг с другом и с F, а также удовлетворяют соотношениям вроде $\ln F^2 = 2\ln F$ и $\sqrt{F}\sqrt{F} = F$. Таким образом, функции от операторов можно использовать для отыскания операторов с предписанными свойствами, например, для извлечения корней из невырожденных операторов.

[1] Т. е. функций, задаваемых сходящимися всюду в $\mathbb{K}$ степенными рядами.

Доказательство теор. 9.3. Пусть оператор F аннулируется многочленом $\alpha(t) = \prod_\lambda (t-\lambda)^{m_\lambda}$, где $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r$ пробегает все различные корни этого многочлена, и пусть искомый гомоморфизм $\mathrm{ev}_F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ существует. По теореме о разложении[1] пространство V является прямой суммой F-инвариантных подпространств $K_\lambda = \ker(F - \lambda \mathrm{Id})^{m_\lambda}$, и согласно формуле (9-6) оператор

$$f(F) = f(\lambda)\cdot E + f'(\lambda)\cdot(F-\lambda E) + \dots + \frac{f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!}(F-\lambda E)^{m_\lambda - 1} + g_\lambda(F)(F-\lambda E)^{m_\lambda} \tag{9-7}$$

действует на каждом подпространстве K_λ точно так же, как результат подстановки оператора F в многочлен

$$j_\lambda^{m_\lambda - 1} f(t) \overset{\text{def}}{=} f(\lambda) + f'(\lambda)\cdot(t-\lambda) + \dots + f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)\cdot(t-\lambda)^{m_\lambda-1}/(m_\lambda-1)!\,,$$

класс которого в фактор кольце $\mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda)^{m_\lambda}\big)$ называется $(m_\lambda - 1)$-*й струёй* функции $f \in \mathcal{A}$ в точке $\lambda \in \mathbb{K}$. По китайской теореме об остатках существует единственный такой многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени меньшей $\deg \alpha(t)$, что

$$p_{f(F)}(t) \equiv j_\lambda^{m_\lambda - 1} f(t) \pmod{\alpha(t)}$$

для всех корней λ многочлена α. Так как операторы $p_{f(F)}(F)$ и $f(F)$ одинаково действуют на каждом подпространстве K_λ и $V = \bigoplus_\lambda K_\lambda$, мы имеем равенство $f(F) = p_{f(F)}(F)$. Поскольку многочлен $p_{f(F)}$ однозначно определяется по f и $\alpha(t)$, гомоморфизм вычисления единствен. Остаётся убедиться, что отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ действительно является гомоморфизмом $\mathbb{K}$-алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$\begin{gathered} J : \mathcal{A} \to \frac{\mathbb{K}[t]}{\big((t-\lambda_1)^{m_1}\big)} \times \dots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{\big((t-\lambda_r)^{m_r}\big)} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)} \\ f \mapsto \left(j_{\lambda_1}^{m_1 - 1} f, \dots, j_{\lambda_s}^{m_r-1} f \right), \end{gathered} \tag{9-8}$$

сопоставляющее функции $f \in \mathcal{A}$ набор её струй[2] во всех корнях многочлена α, является гомоморфизмом $\mathbb{K}$-алгебр, т. е. $\mathbb{K}$-линейно и удовлетворяет равенству $J(fg) = J(f)J(g)$. Первое очевидно, второе достаточно установить для каждой струи j_λ^{m-1} отдельно. Используя правило Лейбница: $(fg)^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} g^{(k-\nu)}$, получаем следующие равенства по модулю $(t-\lambda)^m$:

$$\begin{aligned} j_\lambda^{m-1}(fg) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-\lambda)^k}{k!} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{k!}{\nu!\mu!} f^{(\nu)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{f^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!}(t-\lambda)^\nu \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!}(t-\lambda)^\mu \equiv j_\lambda^{m-1}(f) j_\lambda^{m-1}(g)\,. \end{aligned}$$

Отображение $f \mapsto P_{f(F)}(F)$ является композицией гомоморфизма (9-8) с гомоморфизмом вычисления многочленов $\mathrm{ev}_F : \mathbb{K}[t] \to \mathrm{End}\, V$, $p \mapsto p(F)$, который корректно пропускается через фактор $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$, так как $\alpha(F) = 0$. □

---

[1] См. теор. 9.1 на стр. 118.

[2] Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно фактор кольцу $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$.

Определение 9.3 (интерполяционный многочлен)
Многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$, принимающий на операторе F то же самое значение, что и функция $f \in \mathcal{A}$, называется *интерполяционным многочленом* для вычисления $f(F)$. Он однозначно определяется тем, что в каждом корне λ кратности m аннулирующего оператор f многочлена α многочлен $p_{f(F)}(t)$ и первые его $m-1$ производных принимают те же значения, что функция f и её производные, т. е. многочлен $p_{f(F)}(t)$ решает интерполяционную задачу с кратными узлами из прим. 4.7 на стр. 55. Если $\deg \alpha = n$, отыскание коэффициентов интерполяционного многочлена $p_{f(F)}$ сводится к решению системы из n линейных уравнений на n неизвестных.

Пример 9.6 (степенная функция и рекуррентные уравнения)
Задача отыскания n-того члена a_n числовой последовательности $z : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto z_n$, решающей рекуррентное уравнение $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \cdots + \alpha_m z_{n-m}$ с начальным условием $(z_0, \dots, z_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, сводится вычислению n-той степени *матрицы сдвига*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

смещающей каждый фрагмент из m последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}),$$

так что член a_n оказывается равным первой координате вектора

$$(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n .$$

Матрица $S^n = p_{S^n}(S)$ является результатом подстановки матрицы S в интерполяционный многочлен $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$ для вычисления на матрице S *степенной функции* $f(t) = t^n$. Обратите внимание, что $\deg p_{S^n} < m$, и коэффициенты многочлена p_{S^n} находятся решением системы из m линейных уравнений на m неизвестных.

Например, для *уравнения Фиббоначчи* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ матрица сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Интерполяционный многочлен для вычисления степенной функции t^n на этой матрице линеен. Записывая его в виде $p_{S^n}(t) = at + b$ с неопределёнными коэффициентами a и b, получаем

$$S^n = a\,S + b\,E = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix} .$$

В частности, n-тое *число Фиббоначчи*, решающее уравнение Фиббоначчи с начальным условием $(a_0, a_1) = (0, 1)$, равно первой координате вектора $\left(a_n, a_{n+1}\right) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b)$. Матрица S аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_S(t) = t^2 - t\ \operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

с однократными корнями $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Функция t^n принимает на них значения $\lambda_\pm^n$. Коэффициенты a и b находятся из системы

$$\begin{cases} a\,\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\,\lambda_- + b = \lambda_-^n\,, \end{cases}$$

и по правилу Крамера первый из них $a = \left(\lambda_+^n - \lambda_-^n\right)/\left(\lambda_+ - \lambda_-\right)$. Тем самым,

$$a_n = a = \frac{\left((1+\sqrt{5})/2\right)^n - \left((1-\sqrt{5})/2\right)^n}{\sqrt{5}}\,.$$

9.5. Разложение Жордана. Всюду в этом разделе речь идёт об операторах на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.

Теорема 9.4 (разложение Жордана)
Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ существует единственная пара таких операторов F_d и F_n, что F_n нильпотентен, F_d диагонализуем, $F_dF_n = F_nF_d$ и $F = F_d + F_n$. Кроме того, операторы F_d и F_n являются многочленами от оператора F с нулевыми свободными членами.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Spec} F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. В силу алгебраической замкнутости поля $\Bbbk$, характеристический многочлен оператора F полностью разлагается на линейные множители: $\chi_F(t) = \prod_i (t-\lambda_i)^{m_i}$, а пространство V является прямой суммой корневых подпространств: $V = \bigoplus_i K_i$, где $K_i = \ker(F - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}$. Так как многочлены $(t-\lambda_i)^{m_i}$ попарно взаимно просты, по китайской теореме об остатках существуют такие многочлены $f_1, \dots, f_r \in \Bbbk[t]$, что

$$f_i(t) \equiv \begin{cases} 1 \mod \left(t-\lambda_i\right)^{m_i} \\ 0 \mod \left(t-\lambda_j\right)^{m_j} \text{ при } j \neq i\,. \end{cases}$$

Если $\lambda_i \neq 0$, то многочлен t обратим по модулю $(t-\lambda_i)^{m_i}$. Поэтому найдётся такой многочлен $g_i(t)$, что $t \cdot g_i(t) \equiv \lambda_i \mod \left(t-\lambda_i\right)^{m_i}$. Если $\lambda_i = 0$, то положим $g_i(t) = 0$. Тогда при каждом i многочлен $p_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} t\sum_{j=1}^r g_j(t) f_j(t) \equiv \lambda_i \mod \left(t-\lambda_i\right)^{m_i}$ и не имеет свободного члена. Из этих сравнений вытекает, что оператор $F_d \stackrel{\text{def}}{=} p_s(F)$ действует на каждом корневом подпространстве $K_i = \ker(F-\lambda_i\mathrm{Id})^{m_i}$ как умножение на λ_i и, стало быть, диагонализуем. Оператор $F_n \stackrel{\text{def}}{=} F - F_d$ действует на K_i как $F - \lambda_i \mathrm{Id}$ и, тем самым, нильпотентен. Будучи многочленами от F, операторы F_d и F_n перестановочны между собою и с F. Это доказывает существование операторов F_d и F_n с требуемыми свойствами, включая последнее утверждение предложения.

Докажем единственность. Пусть есть ещё одно разложение $F = F_d' + F_n'$, в котором F_d' диагонализуем, F_n' нильпотентен и $F_d'F_n' = F_n'F_d'$. Из последнего равенства вытекает, что F_d' и F_n' перестановочны с любым многочленом от $F = F_d' + F_n'$, в частности, с построенными выше F_d и F_n. Поэтому каждое собственное подпространство V_λ оператора F_d переводится оператором F_d' в себя[1], причём F_d' диагонализуем[2] на каждом V_λ. Если бы оператор F_d' имел на V_λ собственный вектор с собственным значением $\mu \neq \lambda$, то этот вектор был бы собственным для оператора

[1]См. n° 9.2.2 на стр. 121.
[2]См. сл. 9.3 на стр. 121.

$F_n - F_n' = F_d - F_d'$ с собственным значением $\lambda - \mu \neq 0$, что невозможно, так как оператор $F_n - F_n'$ нильпотентен.

Упражнение 9.14. Докажите, что разность двух перестановочных нильпотентных операторов нильпотентна.

Следовательно, оператор F_d' действует на каждом собственном подпространстве V_λ оператора F_d как умножение на λ, откуда $F_d' = F_d$. Тогда и $F_n' = F - F_d' = F - F_d = F_n$. □

Определение 9.4

Операторы F_d и F_n из теор. 9.4 называются, соответственно, *диагонализуемой* и *нильпотентной* составляющими оператора F.

Замечание 9.3. Поскольку операторы F_d и F_n являются многочленами от F, каждое F-инвариантное подпространство $U \subset V$ является инвариантным для F_d и F_n.

Следствие 9.5 (Жорданова нормальная форма)

Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ существует такой базис, в котором матрица оператора F состоит из расположенных на главной диагонали квадратных блоков вида[1]

$$J_m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda E + J_m(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \tag{9-9}$$

где $\lambda \in \operatorname{Spec} F$, а $m \in \mathbb{N}$ — размер блока, а все остальные её элементы нулевые. С точностью до перестановки блоков, эта матрица не зависит от выбора базиса с таким свойством, и суммарный размер блоков с заданным $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ на диагонали равен кратности корня λ характеристического многочлена оператора F. Два оператора подобны если и только если их матрицы указанного вида отличаются друг от друга перестановкой блоков.

Доказательство. Ограничение оператора $F = F_d + F_n$ на корневое подпространство K_λ имеет вид $\lambda \mathrm{Id} + F_n|_{K_\lambda}$. В n° 9.3 на стр. 122 мы видели, в пространстве K_λ имеется жорданов базис, в котором матрица нильпотентного оператора $F_n|_{K_\lambda} : K_\lambda \to K_\lambda$ состоит из блоков вида (9-9) с $\lambda = 0$, причём набор блоков не зависит от выбора жорданова базиса. Объединяя жордановы базисы корневых подпространств друг с другом, мы получаем требуемый базис в V. Единственность и последнее утверждение следствия вытекают из того, что в любом базисе, где матрица оператора F имеет указанный вид, операторы F_d и F_n имеют матрицы, получающиеся из матрицы F обнулением всех, соответственно, наддиагональных и диагональных элементов, а линейная оболочка базисных векторов, задействованных во всех клетках (9-9) с заданным $\lambda \in \operatorname{Spec} F$, совпадает с корневым подпространством K_λ, и тем самым, эти векторы образуют жорданов базис ограничения $F_n|_{K_\lambda}$. □

[1] Ср. с форм. (9-3) на стр. 122.

Определение 9.5 (жорданов базис)
Базисы пространства V, удовлетворяющие условиям сл. 9.5, называются *жордановыми*, а матрица оператора F, о которой идёт речь в сл. 9.5, называется *жордановой нормальной формой* этого оператора.

Пример 9.7
Рассмотрим оператор F умножения на класс $[t]$ в кольце вычетов $\Bbbk[t]\big/\big((t-\lambda)^m\big)$. Поскольку $t = \lambda + (t-\lambda)$, нильпотентная составляющая F_n этого оператора представляет собою оператор умножения на класс $[t-\lambda]$, а диагонализуемая составляющая $F_d = \lambda\mathrm{Id}$. Классы

$$[(t-\lambda)^{m-1}], [(t-\lambda)^{m-2}], \dots, [t-\lambda], [1] \in \Bbbk[t]\big/\big((t-\lambda)^m\big) \tag{9-10}$$

образуют жорданову цепочку нильпотентного оператора[1] F_n, и в базисе из этих классов оператор $F = \lambda\mathrm{Id} + F_n$ записывается матрицей (9-9) размера $n \times n$. Из сл. 9.5 вытекает, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждый линейный оператор на конечномерном векторном пространстве подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме конечного числа фактор колец вида $\Bbbk[t]\big/\big((t-\lambda)^m\big)$, где слагаемые могут повторяться, и жорданов базис для такого оператора является объединением классов (9-10), приходящих из каждого слагаемого этой прямой суммы. Это частный случай общей классификации пространств с операторами, упомянутой в зам. 9.1. на стр. 115.

[1]См. опр. 9.1 на стр. 122.

Упр. 9.1. Если отождествить $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ с полем $\mathbb{C}$, отправив классы $[1]$ и $[t]$ в 1 и i соответственно, умножение на класс $[t]$ превратится в умножение на i, т. е. в поворот на угол $\pi/2$, у которого нет инвариантных прямых.

Упр. 9.2. Пусть $\Bbbk[t]/\left(t^n\right) = U \oplus W$, где U и W переводятся в себя умножением на $[t]$. Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на $[t]$, так как иначе их сумма тоже бы в нём содержалась. Поэтому в одном из них, пусть это будет U, имеется класс $[g]$ многочлена g с ненулевым свободным членом. Тогда классы $[t^{n-1}g], \dots, [tg], [g] \in U$ выражаются через базис $[1], [t], \dots, [t^{n-1}]$ пространства $\Bbbk[t]/(t^n)$ при помощи верхнетреугольной матрицы, на диагонаи которой всюду стоит ненулевой свободный член многочлена g. Следовательно, эти классы тоже образуют базис в $\Bbbk[t]/(t^n)$, и значит, содержащее их подпространство U совпадает со всем пространством $\Bbbk[t]/(t^n)$.

Упр. 9.3. Если $V = U \oplus W$, где U и W F-инвариантны, то $V^* = \operatorname{Ann} U \oplus \operatorname{Ann} W$, где оба подпространства $\operatorname{Ann} U$, $\operatorname{Ann} W$ тоже F^*-инвариантны: если $\xi \in \operatorname{Ann} U$, то для всех $u \in U$

$$\langle F^*\xi \,,\, u \rangle = \langle \xi \,,\, Fu \rangle = 0 \,,$$

так как $Fu \in U$, и значит, $F^*\xi \in \operatorname{Ann} U$. Обратная импликация получается по двойственности в силу изоморфизма $V^{**} = V$.

Упр. 9.4. Пусть $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n$. Напишите матрицу F оператора умножения на t в фактор кольце $\Bbbk[x]/(f)$ в базисе из классов мономов $t^{n-1},\ t^{n-2},\ \cdots,\ t,\ 1$ и разложите $\det(tE - F)$ по первому столбцу.

Упр. 9.5. Пусть $f(F) = 0$. Разделим f в $\Bbbk[t]$ на μ_F с остатком: $f(t) = q(t)\mu_F(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_f$. Подставляя в это равенство $t = F$, заключаем, что $r(F) = 0$, откуда либо $\deg r \geqslant \deg \mu_F$ по определению μ_F, либо $r = 0$. Следовательно, f делится на μ_F. Если ν_F — другой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, такой что $\nu_F(F) = 0$ в $\operatorname{End}(V)$, то по уже доказанному ν_F делится на μ_F, и частное имеет степень нуль, т. к. $\deg \mu_F = \deg \nu_F$. Поскольку старшие коэффициенты у μ_F и ν_F одинаковы, константа $\mu_F/\nu_F = 1$.

Упр. 9.6. Пусть $f(t) = \mu_{v,F}(t)g(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_{v,F}$. Если $f(F) = 0$, то $r(F)v = 0$, что невозможно для ненулевого r с $\deg r < \deg \mu_{v,F}$ по определению многочлена $\mu_{v,F}$. Поэтому $r = 0$.

Упр. 9.7. Если оператор $q(F)$ аннулирует все векторы некоторого базиса, то он аннулирует вообще все векторы пространства.

Упр. 9.9. Умножение на класс t в факторе $\Bbbk[t]/\left(t^n\right)$ с $n \geqslant 2$.

Упр. 9.10. Над алгебраически замкнутым полем каждый многочлен, у которого нет ненулевых корней, имеет вид t^m. Поэтому $\chi_F(t) = t^m$, и по теореме Гамильтона – Кэли $F^m = 0$.

Упр. 9.12. Модифицируйте доказательство предл. 4.8 на стр. 58.

Упр. 9.13. Для любого линейного оператора $G : V \to V$ подпространства

$$0 \subseteq \ker F \subseteq \ker F^2 \subseteq \ker F^3 \subseteq \dots$$

образуют вложенную цепочку и отличны от нуля если и только если $\ker G \neq 0$.

Упр. 9.14. Если $a^n = 0$, $b^m = 0$ и $ab = ba$, то $(a - b)^{m+n-1} = 0$ по формуле Ньютона.