§7. Двойственность

7.1. Двойственные пространства. Линейные отображения $V \to \Bbbk$ принято называть *линейными функционалами*[1] или *ковекторами*. Они образуют векторное пространство, которое обозначается $V^* \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ и называется *двойственным* или *сопряжённым* к пространству V.

Пример 7.1 (линейные функционалы на координатном пространстве)
Каждый линейный функционал $\xi : \Bbbk^n \to \Bbbk$ однозначно задаётся набором своих значений

$$\xi_i = \xi(e_i) \in \Bbbk$$

на стандартных базисных векторах e_i пространства $\Bbbk^n$. Значение функционала ξ на произвольном векторе $v = e_1x_1 + \dots + e_nx_n$ при этом равно

$$\xi(v) = \xi(e_1 \cdot x_1 + \dots + e_n \cdot x_n) = \xi(e_1) \cdot x_1 + \dots + \xi(e_n) \cdot x_n = \xi_1x_1 + \dots + \xi_nx_n .$$

Наоборот, для любого набора из n констант $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Bbbk$ эта формула задаёт линейный функционал $\xi : \Bbbk^n \to \Bbbk$. Если записывать векторы v пространства $\Bbbk^n$ в виде координатных столбцов высоты n, то двойственное пространство $\Bbbk^{n*}$ удобно представлять себе как n-мерное координатное пространство,состоящее из строк ширины n. При этом действие ковектора-строки $\xi \in \Bbbk^{n*}$ на вектор-столбец $v \in \Bbbk^n$ заключается в матричном умножении: $\xi(v) = \xi v$.

Пример 7.2 (степенные ряды как функционалы на многочленах)
Этот пример является бесконечномерной версией предыдущего. Кольцо многочленов $\Bbbk[x]$ является векторным пространством над $\Bbbk$ со счётным базисом из мономов x^k, где $k \geqslant 0$ и $x^0 = 1$. Каждый линейный функционал $\psi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$ однозначно задаётся последовательностью своих значений $\psi_k = \psi(x^k)$ на базисных векторах пространства $\Bbbk[x]$ и действует на произвольный многочлен $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ по правилу

$$\psi(a) = \sum_{k=0}^{\deg a} a_k\psi_k = \psi_0a_0 + \psi_1a_1 + \dots + \psi_ma_m , \quad \text{где} \quad m = \deg a . \tag{7-1}$$

Каждая бесконечная последовательность чисел $\psi_i \in \Bbbk$ задаёт по этой формуле линейный функционал $\psi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$. Бесконечную последовательность элементов ψ_i поля $\Bbbk$ удобно кодировать *производящей функцией* — формальным степенным рядом $\Psi(t) = \sum_{i\geqslant 0} \psi_it^i \in \Bbbk[\![t]\!]$. Таким образом, двойственное к $\Bbbk[x]$ векторное пространство $\Bbbk[x]^*$ изоморфно пространству формальных степенных рядов $\Bbbk[\![t]\!]$. При этом изоморфизме каждый степенной ряд $\Psi(t) = \sum_{i\geqslant 0} \psi_it^i$ задаёт линейный функционал $\psi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$, переводящий многочлен $a \in \Bbbk[x]$ в число (7-1). Например, функционал вычисления $\operatorname{ev}_\alpha : \Bbbk[x] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(\alpha)$, сопоставляющий многочленам их значения в точке $\alpha \in \Bbbk$ и действующий на базисные мономы по правилу $x^n \mapsto \alpha^n$, задаётся степенным рядом

$$E_\alpha(t) = \sum_{n\geqslant 0} \alpha^nt^n = \frac{1}{1-\alpha t} \in \Bbbk[\![t]\!] .$$

Отметим, что все функционалы вычисления линейно независимы, так как равенство

$$\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1t} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2t} + \dots + \frac{\lambda_k}{1-\alpha_kt} = 0$$

[1] А также *линейными формами*.

в кольце $\Bbbk[\![t]\!]$ после приведения к общему знаменателю превращается в равенство

$$\lambda_1 \prod_{\nu\neq 1}(1-\alpha_\nu t) + \lambda_2 \prod_{\nu\neq 2}(1-\alpha_\nu t) + \cdots + \lambda_k \prod_{\nu\neq k}(1-\alpha_\nu t) = 0$$

в кольце многочленов $\Bbbk[t]$, подставляя в которое $t = 1/\alpha_i$, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, k$. В частности, в пространстве $\mathbb{R}[\![t]\!] \simeq \mathbb{R}[x]^*$, двойственном к счётномерному пространству $\mathbb{R}[x]$, имеется несчётное линейно независимое множество векторов.

Упражнение 7.1. Покажите, что векторное пространство $\Bbbk[\![t]\!]$ не порождается линейно никаким счётным множеством векторов ни над каким полем $\Bbbk$.

Пример 7.3 (функционалы вычисления функций на множестве)
Пусть X — любое множество, и $V = \Bbbk^X$ — пространство всех функций $X \to \Bbbk$, как в прим. 4.1 на стр. 49. С каждой точкой $x \in X$ связан *функционал вычисления*[1] $\mathrm{ev}_x : \Bbbk^X \to \Bbbk$, $f \mapsto f(x)$, переводящий функцию $f : X \to \Bbbk$ в её значение $f(x) \in \Bbbk$ в точке x. Функционалы вычисления линейно независимы, поскольку вычисляя обе части равенства $\lambda_1 \mathrm{ev}_{x_1} + \cdots + \lambda_m \mathrm{ev}_{x_m} = 0$ на дельта-функции $\delta_{x_i} : X \to \Bbbk$, равной нулю во всех точках множества X кроме точки x_i, где она равна единице, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, m$.

7.1.1. Двойственные базисы. С каждым базисом $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ конечномерного векторного пространства V связан набор *координатных функционалов* $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, лежащих в двойственном пространстве V^*. По определению, функционал $e_i^* : V \to \Bbbk$ сопоставляет каждому вектору пространства V его i-ю координату в базисе $\boldsymbol{e}$, т. е. $e_i^*(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \overset{\text{def}}{=} x_i$. Таким образом, значения функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases} \tag{7-2}$$

Упражнение 7.2. Убедитесь, что все отображения $e_i^* : V \to \Bbbk$ линейны.

Из формулы (7-2) вытекает, что ковекторы $e_1^*, \dots, e_n^*$ линейно независимы: вычисляя обе части равенства $\lambda_1e_1^* + \cdots + \lambda_ne_n^* = 0$ на базисном векторе e_i, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$. С другой стороны, каждый линейный функционал $\varphi : V \to \Bbbk$ линейно выражается через координатные функционалы e_i^* — коэффициентами этого линейного выражения являются значения функционала φ на соответствующих базисных векторах пространства V, поскольку для любого вектора $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ выполняется равенство

$$\varphi(v) = \varphi(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) = e_1^*(v)\varphi(e_1) + \cdots + e_n^*(v)\varphi(e_n)\,, \tag{7-3}$$

как раз и означающее, что $\varphi = e_1^* \cdot \varphi(e_1) + \cdots + e_n^* \cdot \varphi(e_n)$ в пространстве V^*. Таким образом, координатные функционалы e_i^* образуют базис векторного пространства V^*. Этот базис называется *двойственным* к базису из векторов e_i в V. В частности, в противовес прим. 7.2, для конечномерного пространства V выполняется равенство $\dim V^* = \dim V$.

Упражнение 7.3. Пусть $\dim V = n$, а векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ и ковекторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ таковы, что $\varphi_i(v_i) = 1$ и $\varphi_i(v_j) = 0$ при $i \neq j$. Покажите, что векторы v_i образуют базис в V, а ковекторы φ_i — двойственный базис в V^*.

[1] Обозначение ev происходит от «*evaluation*».

Пример 7.4 (формула Тейлора)
Пусть поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль[1]. Зафиксируем число $a \in \Bbbk$ и для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ рассмотрим на пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n функционал

$$\varphi_i : \Bbbk[x]_{\leqslant n} \to \Bbbk, \quad f \mapsto f^{(i)}(a),$$

сопоставляющий многочлену значение его i-й производной в точке a. При $i = 0$ мы полагаем $\varphi_0(f) = \mathrm{ev}_a(f) = f(a)$. Функционалы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ и многочлены $f_k(x) = (x - a)^k / k!$, где $k = 0, 1, \dots, n$ и $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$, удовлетворяют условиям упр. 7.3, т. е. $\varphi_i(f_i) = 1$ и $\varphi_i(f_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, многочлены f_i образуют в $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ базис, в котором координатами каждого многочлена служат его значение и значения первых n его производных в точке a. Поэтому для любого многочлена g степени не выше n имеет место *формула Тэйлора*

$$g(x) = g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + g''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + \dots + g^{(n)}(a) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}, \tag{7-4}$$

и для любого набора чисел $b_0, b_1, \dots, b_n \in \Bbbk$ существует единственный такой многочлен g степени не выше n, что $g^{(i)}(a) = b_i$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$, причём g задаётся явной формулой

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - a)^k / k!.$$

7.1.2. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{**}$. Каждый вектор $v \in V$ задаёт на двойственном к V пространстве V^* *функционал вычисления* $\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk$, $\varphi \mapsto \varphi(v)$. Поскольку число $\varphi(v) \in \Bbbk$ линейно зависит как от $v \in V$, так и от $\varphi \in V^*$, сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт *каноническое*[2] линейное вложение

$$\mathrm{ev} : V \hookrightarrow V^{**}, \quad v \mapsto \mathrm{ev}_v. \tag{7-5}$$

Упражнение 7.4. Убедитесь, что отображение (7-5) инъективно[3].

Если пространство V конечномерно, то согласно упр. 7.3 каждый базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V переводится отображением (7-5) в двойственный к базису $e_1^*, \dots, e_n^*$ пространства V^* базис пространства V^{**}. Тем самым, для конечномерного пространства V отображение (7-5) канонически отождествляет V^{**} с V, т. е. каждая линейная форма $V^* \to \Bbbk$ представляет собою функционал вычисления значений ковекторов из V^* на однозначно задаваемом этой формой векторе $v \in V$, и любой базис $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* состоит из координатных функционалов для однозначно задаваемого этим базисом базиса $\boldsymbol{\varepsilon}^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ в V. Таким образом, двойственные конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу совершенно симметричные роли: *каждое* из них является пространством линейных функционалов на другом. Дабы подчеркнуть симметрию между векторами и ковекторами, мы будем называть число

$$\langle \varphi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) = \mathrm{ev}_v(\varphi) \in \Bbbk \tag{7-6}$$

свёрткой ковектора φ с ветором v. Свёртка является билинейным отображением

$$V^* \times V \to \Bbbk, \quad (\varphi, v) \mapsto \langle \varphi, v \rangle.$$

[1] Т. е. сумма любого числа единиц поля $\Bbbk$ отлична от нуля.
[2] Т. е. не требующее выбора базиса.
[3] Для любого, в том числе и бесконечномерного векторного пространства V.

Для координатного пространства $V = \Bbbk^n$ в обозначениях из прим. 7.1 на стр. 83 свёртка ковектора-строки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Bbbk^{n*}$ с вектором-столбцом $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \Bbbk^n$ задаётся матричным произведением $\langle\, \xi\,,\, x\,\rangle = \xi x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$. Обратите внимание, что правая часть этого равенства абсолютно симметрична по буквам ξ и x.

7.2. Двойственность между подпространствами. Каждое множество ковекторов $M \subset V^*$ можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений $\langle\, \xi\,,\, x\,\rangle = 0$ на неизвестный вектор $x \in V$ с левыми частями ξ, пробегающими множество M. Пространство[1] всех решений такой системы обозначается $\operatorname{Ann}(M) \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \langle\, \xi\,,\, v\,\rangle = 0\ \forall\, \xi \in M\}$ и называется *аннулятором* множества ковекторов $M \subset V^*$. Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим $\operatorname{Ann}(N) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \langle\, \varphi\,,\, v\,\rangle = 0\ \forall\, v \in N\}$. Это множество всех линейных функционалов, ядро которых содержит N, или — на двойственном языке — пространство решений системы однородных линейных уравнений $\langle\, y\,,\, v\,\rangle = 0$ на неизвестный ковектор $y \in V^*$ с левыми частями v, пробегающими множество $N \subset V$. В частности, аннулятор любого множества векторов является векторным подпространством в V^*.

Упражнение 7.5. Убедитесь, что аннулятор любого множества X векторов или ковекторов совпадает с аннулятором линейной оболочки $\operatorname{span}(X)$.

Предложение 7.1
Для любых[2] векторного пространства V и подпространства $U \subset V$ имеются канонические изоморфизмы $(V/U)^* \simeq \operatorname{Ann} U$ и $V^*/\operatorname{Ann} U \simeq U^*$.

Доказательство. Чтобы задать первый изоморфизм, обозначим через $\pi : V \twoheadrightarrow V/U$, $v \mapsto [v]_U$, отображение факторизации и сопоставим линейному функционалу $\xi : V/U \to \Bbbk$ композицию $\xi\pi : V \to \Bbbk$, $v \mapsto \xi\left([v]_U\right)$. Получим линейное отображение $F : (V/U)^* \to V^*$, $\xi \mapsto \xi \circ \pi$, у которого $\ker F = 0$ и $\operatorname{im} F \subseteq \operatorname{Ann} U$. Обратное отображение $F^{-1} : \operatorname{Ann} U \to (V/U)^*$ сопоставляет зануляющемуся на подпространстве U линейному функционалу $\psi : V \to \Bbbk$ линейный функционал $\overline{\psi} : V/U \to \Bbbk$, действующий по правилу $\overline{\psi}([v]_U) = \psi(v)$.

Упражнение 7.6. Убедитесь, что это правило корректно и что $\overline{\xi\pi} = \xi$ для всех $\xi \in (V/U)^*$, а $\overline{\psi}\pi = \psi$ для всех $\psi \in \operatorname{Ann} U \subset V^*$.

Чтобы задать второй изоморфизм, рассмотрим линейное отображение $G : V^* \to U^*$, $\xi \mapsto \xi|_U$, которое сопоставляет линейному функционалу $\xi : V \to \Bbbk$ его ограничение на подпространство $U \subset V$. По построению, $\ker G = \operatorname{Ann} U$. Отображение G сюрьективно, поскольку каждый функционал $\psi : U \to \Bbbk$ можно продолжить до функционала $\varphi : V \to \Bbbk$ с ограничением $\varphi|_U = \psi$.

Упражнение 7.7. Убедитесь в этом.

Канонический изоморфизм $V^*/\ker G \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} G$ из прим. 4.9 на стр. 57 — это нужный нам изоморфизм $V^*/\operatorname{Ann} U \xrightarrow{\sim} U^*$. □

Следствие 7.1
Если векторное пространство V конечномерно, то для любого подпространства $U \subset V$ выполняется равенство $\dim U + \dim \operatorname{Ann} U = \dim V$.

[1] Будучи пересечением ядер линейных отображений $\xi : V \to \Bbbk$ по всем $\xi \in M$, аннулятор любого множества $M \subset V^*$ является векторным подпространством в V.

[2] В том числе бесконечномерных.

Доказательство. В силу предл. 7.1 $\dim \operatorname{Ann} U = \dim(V/U)^* = \dim(V/U)$, а по предл. 4.8 на стр. 58 $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$. □

Упражнение 7.8. Пусть векторы $u_1, \dots, u_k$ составляют базис в U, а векторы $w_1, \dots, w_m$ дополняют их до базиса в V. Обозначим через $u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$ двойственный базис[1] в V^*. Покажите, что ковекторы $w_1^*, \dots, w_m^*$ образуют базис в $\operatorname{Ann} U$.

Следствие 7.2
Для любого векторного подпространства $U \subset V$ выполняется равенство $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U = U$.

Доказательство. По определению аннуляторов, $U \subset \operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U$. С другой стороны, по сл. 7.1 $\dim \operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U = \dim V^* - \dim \operatorname{Ann} U = \dim V^* - \dim V + \dim U = \dim U$. □

Замечание 7.1. Если в сл. 7.1 и сл. 7.2 взять в качестве V двойственное пространство V^* и отождествить двойственное к V^* пространство V^{**} с исходным пространством V при помощи канонического изоморфизма из n° 7.1.2, то мы получим для любого подпространства $U \subset V^*$ равенства $\dim U + \dim \operatorname{Ann} U = \dim V$ и $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U = U$.

Замечание 7.2. На языке линейных уравнений сл. 7.2 утверждает, что любая линейная форма, которая зануляется на всех решениях некоторой системы однородных линейных уравнений, является линейной комбинацией этих уравнений, а сл. 7.1 означает, что каждое подпространство коразмерности m в V можно задать системой из m линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из m линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности m в V.

Упражнение 7.9. Покажите, что $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} N = \operatorname{span} N$ для любого подмножества $N \subset V$.

Пример 7.5 (теорема о ранге матрицы)
Столбцы $a_1, \dots, a_n$ произвольной матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ являются векторами координатного пространства $\Bbbk^m$. Обозначим через $U \subset \Bbbk^m$ их линейную оболочку. Каждый максимальный по включению линейно независимый набор столбцов матрицы A является базисом в U и состоит ровно из $\dim U = \operatorname{rk} A$ векторов. В i-й строке матрицы A стоят вычисленные на векторах $a_1, \dots, a_n$ значения базисного ковектора $e_i^* \in \Bbbk^{m*}$ из двойственного к стандартному базису в $\Bbbk^m$ базиса в $\Bbbk^{m*}$. Согласно предл. 7.1, ограничения функционалов $e_1^*, \dots, e_n^*$ на подпространство U линейно порождают двойственное к U пространство U^*. Поэтому любой максимальный по включению линейно независимый набор функционалов $e_i^*|_U$ составляет базис в U^* и тоже состоит из $\dim U^* = \dim U = \operatorname{rk} A$ векторов. Но каждый линейный функционал $e_i^*|_U$ однозначно определяется набором своих значений на порождающих пространство U векторах $a_1, \dots, a_n$. В частности, ограничения функционалов $e_{i_1}^*, \dots, e_{i_k}^*$ на подпространство U линейно зависимы если и только если линейно зависимы наборы этих значений, т. е. соответствующие строки матрицы A. Мы заключаем, что максимальный по включению линейно независимый набор строк матрицы A также состоит из $\operatorname{rk} A$ строк.

[1] См. n° 7.1.1 на стр. 84.

Теорема 7.1
Соответствие $U \leftrightarrow \operatorname{Ann} U$ задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^*. Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \iff \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W\,,$$

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V. Равенство $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = U$ означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(V) \arrow[r, bend left, "U\mapsto \operatorname{Ann} U"] & \mathcal{S}(V^*) \arrow[l, bend left, "\operatorname{Ann} W \mapsfrom W"] \end{tikzcd}$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация $U \subset W \Rightarrow \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W$ очевидна. Если взять в ней в качестве U и W, соответственно, подпространства $\operatorname{Ann} W$ и $\operatorname{Ann} U$ и воспользоваться равенствами $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W = W$ и $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = U$, получим обратную импликацию $\operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W \Rightarrow U \subset W$. Равенство

$$\bigcap_\nu \operatorname{Ann} U_\nu = \operatorname{Ann}\Big(\sum_\nu U_\nu\Big) \tag{7-7}$$

тоже очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_ν, зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом подпространстве в отдельности. Если взять в (7-7) в качестве подпространств U_ν пространства $\operatorname{Ann} U_\nu$, получаем равенство $\bigcap_\nu U_\nu = \operatorname{Ann}\Big(\sum_\nu \operatorname{Ann} U_\nu\Big)$. Беря в нём аннуляторы обеих частей, приходим к равенству $\operatorname{Ann}\big(\bigcap_\nu W_\nu\big) = \sum_\nu \operatorname{Ann} W_\nu$. □

Следствие 7.3
Две системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ на переменный вектор-столбец $x \in \Bbbk^n$ имеют одно и то же пространство решений если и только если приведённые ступенчатые матрицы A_{red} и B_{red} этих систем совпадают друг с другом с точностью до добавления или удаления нулевых строк.

Доказательство. Обозначим через U и W линейные оболочки строк матриц A и B в пространстве $\Bbbk^{n*}$ ковекторов-строк ширины n. Согласно упр. 7.9 пространства решений систем уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ суть не что иное как лежащие в пространстве векторов-столбцов $\Bbbk^n$ высоты n аннуляторы $\operatorname{Ann} U$ и $\operatorname{Ann} W$ пространств U и W. По теор. 7.1 равенство $\operatorname{Ann} U = \operatorname{Ann} W$ пространств решений равносильно равенству $U = W$ линейных оболочек строк матриц A и B. По сл. 6.1 на стр. 82 эти линейные оболочки совпадают если и только если совпадают их базисы с приведёнными ступенчатыми матрицами координат. □

7.3. Двойственные линейные отображения. С каждым линейным отображением векторных пространств $F : U \to W$ канонически связано *двойственное отображение*

$$F^* : W^* \to U^*\,, \quad \xi \mapsto \xi \circ F\,, \tag{7-8}$$

действующее между двойственными пространствами в противоположном к F направлении и переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $F^*\xi$, значение которой на векторе $v \in U$ равно $F^*\xi(v) \overset{\text{def}}{=} \xi(Fv)$.

Упражнение 7.10. Убедитесь, что композиция $F \circ \xi$ является линейной формой на U и что отображение F^* линейно.

На языке свёрток между векторами и ковекторами[1] связь между двойственными операторами описывается равенством

$$\langle F^*\xi \,,\, v \rangle = \langle \xi \,,\, Fv \rangle \quad \text{для всех } v \in W \text{ и } \xi \in U^*, \tag{7-9}$$

из которого видно, что операторы F и F^* играют симметричные роли по отношению друг к другу: двойственный к оператору $F^* : W^* \to U^*$ оператор $F^{**} : U^{**} \to W^{**}$ превращается в оператор $F : U \to W$ при канонических отождествлениях $U^{**} \simeq U$ и $W^{**} \simeq W$ из n° 7.1.2 на стр. 85.

Упражнение 7.11. Убедитесь в этом.

Предложение 7.2
Для двойственных операторов $F : U \to W$ и $F^* : W^* \to U^*$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} &(1)\ \ker F = \operatorname{Ann}\operatorname{im}(F^*) &\qquad &(2)\ \ker(F^*) = \operatorname{Ann}\operatorname{im} F \\ &(3)\ \operatorname{im}(F^*) = \operatorname{Ann}\ker F &\qquad &(4)\ \operatorname{im} F = \operatorname{Ann}\ker(F^*)\,. \end{aligned}$$

Доказательство. Вектор $F(v) \in W$ нулевой если и только если все линейные функционалы $\xi : W \to \Bbbk$ принимают на нём нулевое значение, т. е. $\langle \xi \,,\, Fv \rangle = 0$ для всех $\xi \in W^*$. В силу (7-9) это требование равносильно требованию $\langle F^*\xi \,,\, v \rangle = 0$ для всех $\xi \in W^*$, которое означает, что $v \in \operatorname{Ann}\operatorname{im} F^*$. Это доказывает равенство (1). Равенство (2) представляет собою равенство (1), написанное для оператора F^* в роли F и оператора $F^{**} = F$ в роли F^*. Равенства (3) и (4) получаются из равенства (1) и (2) взятием аннуляторов обеих частей. □

Следствие 7.4
Векторные пространства $\operatorname{im} F \subset U$ и $\operatorname{im}(F^*) \subset W^*$ канонически двойственны друг другу. Свёртка вектора $Fv \in \operatorname{im} F$ с ковектором $F^*\xi \in \operatorname{im} F^*$ задаётся формулой

$$\langle F^*\xi \,,\, Fv \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle F^*\xi \,,\, v \rangle = \langle \xi \,,\, Fv \rangle\,. \tag{7-10}$$

Доказательство. В прим. 4.9 на стр. 57 и предл. 7.1 на стр. 86 были построены канонические изоморфизмы $\operatorname{im} F \simeq U/\ker F$ и $(U/\ker F)^* \simeq \operatorname{Ann}\ker F$, последний из которых спаривает ковектор $\eta \in \operatorname{Ann}\ker F \subset U^*$ с вектором $[u] \in U/\ker F$ по правилу $\langle \eta \,,\, [u] \rangle = \langle \eta \,,\, u \rangle$, а первый отождествляет класс $[u] \in U/\ker F$ с вектором $F(u) \in \operatorname{im} F$. Равенство (3) из предл. 7.2 утверждает, что каждый $\eta \in \operatorname{Ann}\ker F$ однозначно записывается в виде $F^*\xi$, где $\xi \in W^*$. Собирая всё это вместе и пользуясь равенством $\langle F^*\xi \,,\, u \rangle = \langle \xi \,,\, Fu \rangle$, мы заключаем, что свёртка ковектора $\eta = F^*\xi \in \operatorname{im} F^* = \operatorname{Ann}\ker F \subset U^*$ с вектором $Fu \in \operatorname{im} F$, который представляет класс $[u] \in U/\ker F$ при изоморфизме $\operatorname{im} F \simeq U/\ker F$, задаётся формулой (7-10). □

Упражнение 7.12. Убедитесь непосредственно, что формула (7-10) корректна, т. е. результат свёртки не зависит от выбора ковектора $\xi \in W^*$ и вектора $v \in U$, использованных для записи элементов из $\operatorname{im} F^*$ и $\operatorname{im} F$.

[1] См. формулу (7-6) на стр. 85.

Следствие 7.5
Векторное пространство $\ker F \subset U$ канонически двойственно фактор пространству $U^* / \operatorname{im} F^*$, а пространство $\ker F^* \subset W^*$ — фактор пространству $W / \operatorname{im} F$. Свёртки между ними задаются формулами

$$\langle\, \psi + F^*(W^*)\,,\, v \,\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\, \psi\,,\, v \,\rangle \quad \text{и} \quad \langle\, \xi\,,\, w + F(U) \,\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\, \xi\,,\, w \,\rangle\,, \tag{7-11}$$

где $\psi + F^*(W^*) \in U^* / \operatorname{im}(F^*)$, $v \in \ker F$, $\xi \in \ker F^*$, $w + F(U) \in W / \operatorname{im} F$. □

Упражнение 7.13. Проверьте корректность определений (7-11), т. е. независимость правых частей от выбора представителей ψ и w в классах $\psi + F^*(W^*)$ и $w + F(U)$, и докажите сл. 7.5 по образцу сл. 7.4.

Замечание 7.3. Принимая во внимание двойственности из сл. 7.5, фактор по образу линейного отображения F часто называют *коядром* отображения F и обозначают $\operatorname{coker}(F) \overset{\text{def}}{=} W/\operatorname{im} F$. В этих обозначениях первые два утверждения из сл. 7.5 записываются равенствами

$$(\ker F)^* = \operatorname{coker}(F^*) \quad \text{и} \quad (\operatorname{coker} F)^* = \ker(F^*)\,.$$

Предложение 7.3
Пусть отображение $F : U \to W$ имеет в некоторых базисах $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots , u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots , w_m)$ пространств U и W матрицу[1] $F_{\boldsymbol{wu}} = (f_{ij})$. Тогда матрица $F^*_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{w}^*} = (f^*_{ij})$ двойственного отображения $F^* : W^* \to U^*$ в двойственных базисах $\boldsymbol{u}^* = (u^*_1, \dots , u^*_n)$ и $\boldsymbol{w}^* = (w^*_1, \dots , w^*_m)$ пространств W^* и U^* является транспонированной[2] к матрице отображения F:

$$F^*_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{w}^*} = F^t_{\boldsymbol{wu}}\,, \quad \text{т. е. } f^*_{ij} = f_{ji}.$$

Доказательство. Число f^*_{ij} равно i-й координате ковектора $F^*(w^*_j)$ в базисе $\boldsymbol{u}^*$, т. е. свёртке этого ковектора с базисным вектором[3] u_i:

$$f^*_{ij} = \langle\, F^* w^*_j\,,\, u_i \,\rangle = \langle\, w^*_j\,,\, F u_i \,\rangle = \langle\, w^*_j\,,\, \sum_k w_k \cdot f_{ki} \,\rangle = \sum_k \langle\, w^*_j\,,\, w_k \,\rangle \cdot f_{ki} = f_{ji}\,,$$

что и утверждалось. □

Пример 7.6 (ещё раз о ранге матрицы)
Каждая матрица $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ является матрицей линейного отображения

$$F_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m\,, \quad x \mapsto Ax\,,$$

и линейная оболочка столбцов матрицы A совпадает с образом $\operatorname{im} F_A$ этого отображения, т. е. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{im} F_A$. Согласно предл. 7.3, двойственное отображение $F^*_A : \Bbbk^{m*} \to \Bbbk^{n*}$ задаётся в двойственных базисах транспонированной матрицей A^t, откуда

$$\operatorname{rk} A^t = \dim \operatorname{im} F^*_A = m - \dim \ker F^*_A = m - \dim \operatorname{Ann} \operatorname{im} F_A = \dim \operatorname{im} F_A = \operatorname{rk} A\,,$$

что даёт ещё одно доказательство теоремы о ранге матрицы[4].

---

[1]См. n° 5.1 на стр. 59.
[2]См. обсуждение перед упр. 5.4 на стр. 62 из n° 5.2.
[3]См. форм. (7-3) на стр. 84 и сопутствующее обсуждение.
[4]Ср. с теор. 5.1 на стр. 66 и прим. 7.5 на стр. 87.

7.4. Отступление о бесконечномерии. Этот раздел относится скорее к теории множеств, чем к линейной алгебре. В нём изложена стандартная машинерия, позволяющая отбросить предположения о конечномерности, которые для упрощения первого знакомства с предметом были сделаны нами в теореме о базисе[1].

7.4.1. Отношения порядка. Множество X называется *частично упорядоченным* если между некоторыми парами элементов $x, y \in X$ установлено такое отношение $x \leqslant y$, что для всех $x, y, z \in X$ из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ вытекает, что $x \leqslant z$, а одновременное выполнение условий $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ равносильно равенству $x = y$. Запись $x < y$ означает, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$.

Например, пусть $X = 2^M$ является множеством всех подмножеств некоторого множества M. Отношение нестрого включения $x \subseteq y$ подмножества $x \subseteq M$ в подмножество $y \subseteq M$ задаёт на множестве 2^M частичный порядок. Запись $x \subset y$ означает строгое включение.

Частичный порядок на множестве X называется *линейным*, если для любой пары элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant y$ или неравенство $y \leqslant x$. Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ со стандартным отношением неравенства между числами линейно упорядочено, а множество 2^M всех подмножеств множества M с отношением включения не является линейно упорядоченным, если в M не меньше двух элементов.

Линейно упорядоченное множество X называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое подмножество $S \subset X$ содержит такой элемент $s_* \in S$, что $s_* \leqslant s$ для всех $s \in S$. Этот элемент автоматически единствен и называется *начальным элементом* подмножества S. Например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ со стандартным отношением неравенства между числами вполне упорядочено, как и любое дизъюнктное объединение вида $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \ldots$, в котором все элементы каждой копии множества $\mathbb{N}$ полагаются строго большими всех элементов всех предыдущих копий. Пустое множество тоже вполне упорядочено. Напротив, множество $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$ со стандартным отношением неравенства между числами не является вполне упорядоченным.

Вполне упорядоченные множества замечательны тем, что их элементы можно рекурсивно перебрать точно так же, как и элементы множества $\mathbb{N}$. А именно, пусть некоторое зависящее от элемента x вполне упорядоченного множества X утверждение $\Phi(x)$ истинно для начального элемента x_* множества X, и пусть для каждого $x \in X$ истинность утверждения $\Phi(y)$ при всех $y < x$ влечёт за собою истинность утверждения $\Phi(x)$. Тогда $\Phi(x)$ истинно для всех $x \in X$.

Упражнение 7.14. Убедитесь в этом.

Такой способ доказательства утверждения $\Phi(x)$ для всех $x \in X$ называется *трансфинитной индукцией*. Используемые для индуктивного перехода специальные подмножества

$$[x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y < x\}$$

называются *начальными интервалами* частично упорядоченного множества X. Элемент $x \in X$ называется *точной верхней гранью* начального интервала $[x) \subset X$. Отметим, что начальный элемент $x_* \in X$ является точной верхней гранью пустого начального интервала $[x_*) = \varnothing$.

Упражнение 7.15. Покажите, что собственное подмножество $I \subsetneq X$ тогда и только тогда является начальным интервалом вполне упорядоченного множества X, когда $[y) \subset I$ для каждого $y \in I$, и в этом случае точная верхняя грань интервала I однозначно восстанавливается по I как начальный элемент дополнения $X \smallsetminus I$.

---

[1] См. теор. 4.1 на стр. 48.

7.4.2. Лемма Цорна. Рассмотрим произвольное частично упорядоченное множество P и обозначим через $\mathcal{W}(P)$ множество всех подмножеств $W \subset P$, которые вполне упорядочены имеющимся на P отношением $x \leqslant y$. Множество $\mathcal{W}(P)$ непусто и содержит пустое подмножество $\varnothing \subset P$, а также все конечные линейно упорядоченные подмножества[1] $L \subset P$ и, в частности, все элементы множества P.

Лемма 7.1
Не существует такого отображения $\varrho : \mathcal{W}(P) \to P$, что $\varrho(W) > w$ для всех $W \in \mathcal{W}(P)$ и $w \in W$.

Доказательство. Пусть такое отображение ϱ существует. Назовём вполне упорядоченное подмножество $W \subset P$ ϱ-рекурсивным, если $\varrho([y)) = y$ для всех $y \in W$. Например, множество

$$\Big\{\varrho(\varnothing),\ \varrho\big(\{\varrho(\varnothing)\}\big),\ \varrho\big(\big\{\varrho(\varnothing),\ \varrho(\{\varrho(\varnothing)\})\big\}\big)\Big\}$$

ϱ-рекурсивно и может неограниченно расширяться вправо. Любые два различных ϱ-рекурсивных вполне упорядоченных подмножества с общим начальным элементом таковы, что одно из них является начальным интервалом другого.

Упражнение 7.16. Докажите это.

Обозначим через $U \subset P$ объединение всех ϱ-рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств в P с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$.

Упражнение 7.17. Убедитесь, что подмножество $U \subset P$ вполне упорядочено и ϱ-рекурсивно.

Поскольку элемент $\varrho(U)$ строго больше всех элементов из U, он не лежит в U. С другой стороны, множество $W = U \cup \{\varrho(U)\}$ вполне упорядочено, ϱ-рекурсивно, и его начальным элементом является $\varrho(\varnothing)$. Следовательно, $W \subset U$, откуда $\varrho(U) \in U$. Противоречие. □

Предложение 7.4 (лемма Цорна)
Пусть каждое линейно упорядоченное[2] подмножество L частично упорядоченного множества P имеет в P верхнюю грань[3]. Тогда в P есть такой (возможно не единственный) элемент $p^* \in P$, что неравенство $p^* \leqslant x$ выполняется в P только для $x = p^*$.

Доказательство. Если требуемого элемента p^* нет, то для любого $p \in P$ имеется такой элемент $p' \in P$, что $p < p'$. Тогда для каждого вполне упорядоченного подмножества $W \subset P$ найдётся такой элемент $w^* \in P$, что $w < w^*$ для всех $w \in W$. Сопоставляя каждому $W \in \mathcal{W}$ один из таких элементов w^*, мы получаем отображение $\varrho : \mathcal{W} \to P$, которого не может быть по лем. 7.1. □

7.4.3. Теоремы о базисах. Подмножество B векторного пространства V называется *порождающим*, если каждый вектор $v \in V$ записывается в виде

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n\,, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}\,,\ b_i \in B\,,\ \lambda_i \in \Bbbk\,.$$

Иначе можно сказать, что каждый вектор $v \in V$ допускает линейное разложение

$$v = \sum_{b \in B} \lambda_b b\,, \quad \text{где} \quad \lambda_b \in \Bbbk\,, \tag{7-12}$$

[1] Линейно упорядоченные подмножества частично упорядоченного множества называются *цепями*.
[2] Как будет видно из доказательства, слово «линейно» можно заменить на слово «вполне», что делает утверждение более сильным, но классическая формулировка леммы Цорна именно такова.
[3] Т. е. найдётся такой элемент $w^* \in P$, что $w \leqslant w^*$ для всех $w \in W$.

в котором лишь конечное число коэффициентов λ_b отлично от нуля. Порождающее подмножество $B \subset V$ называется *базисом* пространства V, если для каждого $v \in V$ разложение (7-12) единственно, то есть равенство $\sum_{b\in B} \lambda_b b = \sum_{b\in B} \mu_b b$, в котором лишь конечное число коэффициентов λ_b, μ_b отлично от нуля, равносильно тому, что $\lambda_b = \mu_b$ при всех $b \in B$. Непустое множество $A \subset V$ называется *линейно независимым* если равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0\,, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}\,,\ a_i \in A\,,\ \lambda_i \in \Bbbk\,,$$

возможно только когда все $\lambda_i = 0$.

Упражнение 7.18. Убедитесь в том, что множество $E \subset V$ является базисом если и только если оно линейно независимо и порождает V.

Теорема 7.2 (существование базиса)
В каждом отличном от нуля векторном пространстве V для любого[1] линейно независимого множества $A \subset V$ и любого[2] порождающего V множества векторов $B \supset A$ существует базис E, содержащий A и содержащийся в B.

Доказательство. Линейно независимые множества векторов $X \subseteq V$ со свойством $A \subseteq X \subseteq B$ образуют частично упорядоченное отношением включения множество, удовлетворяющее лемме Цорна[3]. В качестве верхней грани линейно упорядоченной цепи вложенных друг в друга линейно независимых наборов векторов можно взять их объединение. Оно линейно независимо, поскольку любой конечный набор его векторов лежит в каком-то одном из множеств цепи, а оно линейно независимо. По лемме Цорна существует такое линейно независимое множество E, что $A \subseteq E \subseteq B$ и для любого линейно независимого множества X со свойством $A \subseteq X \subseteq B$ включение $E \subseteq X$ влечёт равенство $E = X$. Покажем, что E линейно порождает V. Достаточно убедиться, что каждый вектор $b \in B \smallsetminus E$ линейно выражается через E. Так как множество $E \cup \{b\}$ строго больше E, оно линейно зависимо. Поскольку само множество E линейно независимо, любое линейное соотношение между векторами из $E \cup \{b\}$ содержит с ненулевым коэффициентом вектор b. Тем самым, он линейно выражается через E. □

Следствие 7.6
Каждое ненулевое векторное пространство имеет базис, и любой базис любого подпространства можно дополнить до базиса во всём пространстве. □

Теорема 7.3 (равномощность базисов)
В каждом векторном пространстве все базисы равномощны.

Доказательство. Пусть базис B строго мощнее базиса E. Поскольку в конечномерном пространстве это невозможно по теор. 4.1 на стр. 48, оба базиса бесконечны. Каждый вектор $e \in E$ является линейной комбинацией конечного множества векторов $B_e \subset B$. Так как множество E бесконечно, объединение $B_E = \bigcup_{e\in E} B_e$ всех этих конечных множеств равномощно E.

Упражнение 7.19. Убедитесь в этом.

Стало быть, существует вектор $b \in B$, не лежащий в B_E. Линейно выражая b через векторы базиса E, а каждый из входящих в это выражение векторов $e \in E$ — через векторы из B_E, мы

[1] В том числе, пустого.
[2] В том числе, совпадающего с V.
[3] См. предл. 7.4 на стр. 92.

получим линейное выражение вектора $b \in B \smallsetminus B_E$ через векторы из B_E. Тем самым, множество B линейно зависимо. Противоречие. □

Следствие 7.7
Всякое более мощное, чем базис, множество векторов линейно зависимо. □

Теорема 7.4 (продолжение линейных отображений)
Для каждого линейного отображения $F : U \to W$, заданного на подпространстве U векторного пространства V, существует такое (возможно, не единственное) линейное отображение $G : V \to W$, что $G|_U = F$.

Доказательство. Каждое линейное отображение $G : V \to W$ однозначно задаётся своими значениями на векторах любого базиса E пространства V, и для любого отображения множеств $g : E \to W$ существует единственное такое линейное отображение $G : V \to W$, что $G(e) = g(e)$ для всех $e \in E$.

Упражнение 7.20. Убедитесь в этом.

Рассмотрим произвольный базис B в U, дополним его до базиса $E = B \sqcup C$ в V и рассмотрим любое отображение множеств $g : E \to W$, переводящее каждый вектор $b \in B$ в $F(b)$. Отвечающее этому отображению линейное отображение $G : V \to W$ обладает нужным свойством. □

Упр. 7.1. Множество всевозможных конечных $\Bbbk$-линейных комбинаций счётного множества векторов равномощно $\Bbbk \times \mathbb{N}$ — дизъюнктному объединению счётного множества одинаковых копий поля $\Bbbk$, тогда как множество $\Bbbk[\![t]\!]$ равномощно множеству $\Bbbk^{\mathbb{N}}$ всевозможных отображений $\mathbb{N} \to K$, которое строго мощнее, чем $\Bbbk \times \mathbb{N}$ (используйте рассуждение Кантора).

Упр. 7.3. Достаточно убедиться, что векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно независимы. Применяя к обеим частям соотношения $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ функционал ξ_i, получаем $\lambda_i = 0$, и так для каждого $i = 1, \dots, n$.

Упр. 7.4. Ядро $\ker \mathrm{ev} = \{v \in V \mid \forall \varphi \in V^* \ \varphi(v) = 0\} = 0$, поскольку для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой линейный функционал $\varphi : V \to \Bbbk$, что $\varphi(v) \neq 0$. Например, можно дополнить вектор v до базиса пространства V и взять в качестве φ функционал, сопоставляющий вектору его координату в направлении базисного вектора vотносительно этого базиса.

Упр. 7.5. Если линейная форма зануляется на каком-то множестве векторов, то она зануляется и всех линейных комбинациях этих векторов.

Упр. 7.7. Выберем базис $u_1, \dots, u_n$ в U, дополним его векторами $w_1, \dots, w_m$ до базиса в V и зададимся любыми m числами $c_1, \dots, c_m \in \Bbbk$. Существует единственный линейный функционал $\varphi : V \to \Bbbk$, принимающий на выбранных базисных векторах значения $\varphi(u_i) = \psi(u_i)$, $\varphi(w_j) = c_j$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Ограничение $\varphi|_U = \psi$. В бесконечномерном случае утверждение следует из теор. 7.4 на стр. 94.

Упр. 7.8. Ковекторы $w_1^*, \dots, w_m^*$ лежат в $\operatorname{Ann} U$ и линейно независимы, так как являются частью базиса в V^*. Поскольку координатами каждого линейного функционала $\varphi \in V^*$ в базисе

$$u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$$

являются значения $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k), \varphi(w_1), \dots, \varphi(w_m)$, ковектор $\varphi \in \operatorname{Ann} U$ если и только если он является линейной комбинацией ковекторов $w_1^*, \dots, w_m^*$. Тем самым, эти ковекторы линейно порождают $\operatorname{Ann} U$.

Упр. 7.9. По упр. 7.5 на стр. 86 $\operatorname{Ann} N = \operatorname{Ann} \operatorname{span} N$, откуда $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} N = \operatorname{Ann} \operatorname{Ann} \operatorname{span} N = \operatorname{span} N$.

Упр. 7.11. Оператор $F^{**} : U^{**} \to W^{**}$ переводит функционал вычисления $\mathrm{ev}_u : U^* \to \Bbbk$ в композицию $\mathrm{ev}_u \circ F^* : W^* \to \Bbbk$, которая в свою очередь переводит ковектор $\xi : W \to \Bbbk$ в число $\mathrm{ev}_u(F^*\xi) = F^*\xi(u) = \xi(Fu) = \mathrm{ev}_{Fu}(\xi)$. Таким образом, $F^{**}(\mathrm{ev}_v) = \mathrm{ev}_{F(v)}$. Отождествления $U^{**} \simeq U$ и $W^{**} \simeq W$ переводят функционалы вычисления $\mathrm{ev}_u : U^* \to \Bbbk$ и $\mathrm{ev}_w : W^* \to \Bbbk$ в векторы $u \in U$ и $w \in W$, на которых эти вычисления производятся. Формула $F^{**}(\mathrm{ev}_v) = \mathrm{ev}_{F(v)}$ утверждает, что при этом действие оператора F^{**} на функционалы вычисления превращается в действие F на векторы.

Упр. 7.14. Пусть множество $S \subset X$ состоит из всех таких элементов $z \in X$, что утверждение $\Phi(z)$ ложно. Если $S \neq \varnothing$, то в нём есть начальный элемент $s_* \in S$. Поскольку утверждение $\Phi(y)$ истинно для всех $y < s_*$, утверждение $\Psi(s_*)$ тоже истинно, т. е. $s_* \notin S$. Противоречие.

Упр. 7.15. Обозначим через x_I начальный элемент дополнения $X \smallsetminus I$. Начальный интервал $[x_I) \subset X$ является объединением начальных интервалов $[y) \subset X$ по всем $y < x$. Так как I содержит все интервалы $[y)$ с $y < x_I$, мы заключаем, что $I \supseteq [x_I)$, откуда $I = [x_I)$.

Упр. 7.16. Рассмотрим подмножество $Z \subseteq W_1$, состоящее из всех таких $z \in W_1$, что начальный интервал $[z)_1$ в множестве W_1 является одновременно начальным интервалом $[z)_2$ множества W_2.

Множество Z не пусто, поскольку содержит общий начальный элемент множеств W_1 и W_2. Если $Z \subsetneq W_1$ и $Z \subsetneq W_2$, то по упр. 7.15 на стр. 91 подмножество Z является начальным интервалом как в W_1, так и в W_2, что невозможно, поскольку точные верхние границы этих интервалов в W_1 и W_2, с одной стороны, не лежат в Z и, стало быть, различны, а с другой стороны в силу ϱ-рекурсивности множеств W_1 и W_2 обе они равны $\varrho(Z)$, то есть совпадают. Тем самым, $Z = W_1$ или $Z = W_2$. По упр. 7.15 в первом случае W_1 является начальным интервалом в W_2, а во втором — W_2 является начальным интервалом в W_1.

Упр. 7.17. Каждое подмножество $S \subset U$ имеет непустое пересечение с каким-нибудь ϱ-рекурсивным вполне упорядоченным подмножеством $W \subset P$ с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$. По упр. 7.16 подмножество W является начальным интервалом всех содержащих W ϱ-рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$. Поэтому начальный элемент пересечения $S \cap W$ не зависит от выбора W с $W \cap S \neq \varnothing$ и является начальным элементом подмножества S. Каждый начальный интервал $[u) \subset U$ является начальным интервалом любого содержащего u множества W из цепи. В силу ϱ-рекурсивности W элемент $\varrho[u) = u$.

Упр. 7.18. Годится дословно то же рассуждение, что и в доказательстве лем. 4.1 на стр. 47.

Упр. 7.19. Очевидно, что E вкладывается в B_E, а B_E вкладывается в множество $\mathbb{N}\times E$ — дизъюнктное объединение счётного множества копий множества E, которое равномощно E, так как E бесконечно. Тем самым, B_E вкладывается в E. Остаётся применить теорему Кантора – Бернштейна.

Упр. 7.20. Линейное отображение G действует на каждый вектор $v = \sum_{e\in E} x_e e$ по правилу $G(v) = \sum_{e\in E} x_e g(e)$, и для любого отображения множеств $g : E \to W$ это правило задаёт линейное отображение $G : V \to W$.