§2. Аффинные преобразования

2.1. Преобразования, переводящие прямые в прямые. Рассмотрим ассоциированную с двумерным векторным пространством V над произвольным полем $\Bbbk$ аффинную плоскость $\mathbb{A}(V)$. Биективное отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ называется *полуаффинным*, если оно переводит прямые в прямые. Такие отображения составляют группу преобразований плоскости $\mathbb{A}(V)$ в смысле определения со стр 4.

2.1.1. Дифференциал полуаффинного преобразования. В силу своей биективности, каждое полуаффинное преобразование $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ переводит параллельные прямые в параллельные, а значит, параллелограммы — в параллелограммы. Поэтому из равенства $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ вытекает равенство $\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \overrightarrow{\varphi(r)\varphi(s)}$. Это равенство верно, даже когда точки p, q, r, s коллинеарны и не образуют параллелограмма: в этом случае надо выбрать вектор $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ на параллельной (pq) прямой $(xy) \neq (pq)$, как на рис. 2◇1, и использовать параллелограммы $pxyq$ и $rxys$. Мы заключаем, что каждое полуаффинное отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ корректно задаёт отображение векторов

$$D_\varphi : V \to V\,, \quad \overrightarrow{pq} \mapsto \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}\,, \tag{2-1}$$

которое называется *дифференциалом* отображения φ. Отображение φ однозначно восстанавливается, если известен его дифференциал и образ $\varphi(p)$ хоть какой-нибудь точки p: произвольная точка q переводится преобразованием φ в точку $\varphi(q) = \varphi(p) + \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \varphi(p) + D_\varphi(\overrightarrow{pq})$.

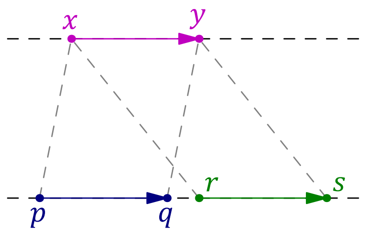

Рис. 2◇1. Корректность определения D_φ.

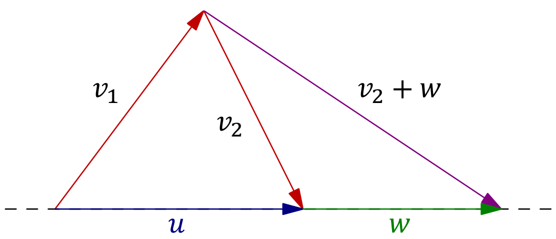

Рис. 2◇2.Аддитивность D_φ.

Так как φ переводит параллелограмм со сторонами u, w в параллелограмм со сторонами $D_\varphi(u)$ и $D_\varphi(w)$, дифференциал аддитивен:

$$D_\varphi(u + w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w)\,, \tag{2-2}$$

причём это равенство справедливо даже когда векторы u и w пропорциональны, поскольку вектор u всегда можно представить в виде суммы векторов v_1 и v_2, каждый из которых не пропорционален u, как на рис. 2◇2, и тогда

$$\begin{aligned} D_\varphi(u + w) &= D_\varphi(v_1 + v_2 + w) = D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2 + w) = \\ &= D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(v_1 + v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w)\,. \end{aligned}$$

Поскольку φ переводит прямые в прямые, D_φ переводит векторы, пропорциональные данному вектору v, в векторы, пропорциональные $D_\varphi(v)$. Поэтому каждый ненулевой вектор $v \in V$ задаёт отображение $\psi_v : \Bbbk \to \Bbbk$, значение которого на числе $\lambda \in \Bbbk$ определяется равенством

$$D_\varphi(\lambda v) = \psi_v(\lambda) \cdot D_\varphi(v)\,. \tag{2-3}$$

Лемма 2.1

Отображение $\psi = \psi_v : \Bbbk \to \Bbbk$ одно и то же для всех векторов $v \in V$. Оно биективно и перестановочно со сложением и умножением, т. е. $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$ и $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\psi(\mu)$ для всех $\lambda, \mu \in \Bbbk$.

Доказательство. Поскольку отображение ψ_v является ограничением биективного и переводящего прямые в прямые отображения φ на прямую, оно тоже биективно для каждого v. Покажем, что $\psi_u = \psi_w$ для любых двух непропорциональных векторов u, w. Так как пересекающиеся в одной точке прямые переходят в прямые, которые тоже пересекаются в одной точке, векторы $D_\varphi(u)$ и $D_\varphi(w)$ не пропорциональны и образуют базис пространства V. Из аддитивности D_φ вытекает, что

$$\begin{array}{l} D_\varphi(\lambda(u+w)) = \psi_{u+w}(\lambda)\cdot D_\varphi(u+w) = \psi_{u+w}(\lambda)\cdot D_\varphi(u) + \psi_{u+w}(\lambda)\cdot D_\varphi(w) \\ \qquad\qquad \| \\ D_\varphi(\lambda u + \lambda w) = D_\varphi(\lambda u) + D_\varphi(\lambda w) = \psi_u(\lambda)\cdot D_\varphi(u) + \psi_w(\lambda)\cdot D_\varphi(w)\,. \end{array}$$

Из единственности разложения вектора по базису мы заключаем, что для всех $\lambda \in \Bbbk$ выполняются равенства $\psi_u(\lambda) = \psi_{u+w}(\lambda) = \psi_w(\lambda)$, что и требовалось. Если векторы u и w пропорциональны, то для любого непропорционального им вектора v будут выполняться равенства $\psi_u = \psi_v = \psi_w$. Таким образом, отображение ψ_v одно и то же для всех v и может быть обозначено просто ψ. Далее, из аддитивности D_φ вытекают равенства

$$\begin{aligned} \psi(\lambda+\mu)\cdot D_\varphi(v) = D_\varphi\left((\lambda+\mu)v\right) = D_\varphi(\lambda v + \mu v) = D_\varphi(\lambda v) + \varphi(\mu v) = \\ = \psi(\lambda)\cdot D_\varphi(v) + \psi(\mu)\cdot D_\varphi(v) = (\psi(\lambda)+\psi(\mu))\cdot D_\varphi(v)\,, \end{aligned}$$

откуда $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$. Равенства

$$\psi(\lambda\mu)\cdot D_\varphi(v) = D_\varphi\left((\lambda\mu)v\right) = D_\varphi\left(\lambda(\mu v)\right) = \psi(\lambda)\cdot D_\varphi(\mu v) = \psi(\lambda)\psi(\mu)\cdot D_\varphi(v)$$

показывают, что $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\cdot\psi(\mu)$. □

2.1.2. Отступление об автоморфизмах полей. Отображение поля в себя $\psi : \Bbbk \to \Bbbk$ называется *гомоморфизмом*, если $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$ и $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\psi(\mu)$ для всех $\lambda, \mu \in \Bbbk$.

Упражнение 2.1. Убедитесь, что каждый гомоморфизм $\psi : \Bbbk \to \Bbbk$ либо инъективен, либо тождественно нулевой[1], и обладает свойствами $\psi(0) = 0$ и $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$, а всякий ненулевой гомоморфизм — свойствами $\psi(1) = 1$ и $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$ при $\mu \neq 0$.

Биективные гомоморфизмы $\Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk$ называются *автоморфизмами* поля $\Bbbk$. Из упр. 2.1 вытекает, что каждый автоморфизм $\psi : \Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk$ тождественно действует на всех элементах вида

$$\pm(1 + \dots + 1)/(1 + \dots + 1) \in \Bbbk\,,$$

где в числителе и в знаменателе стоят суммы каких-то количеств единиц поля $\Bbbk$, причём сумма в знаменателе отлична от нуля. Поскольку в поле $\mathbb{Q}$ и во всех полях вычетов $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое, никаких других элементов нет, у этих полей нет и никаких автоморфизмов кроме тождественного.

[1] Т. е. $\psi(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \Bbbk$.

Всякий автоморфизм $\psi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ тождественно действует на подполе $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и является *строго монотонной функцией*[1], поскольку неравенство $\lambda < \mu$ равносильно тому, что $\mu - \lambda = \alpha^2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, откуда $\psi(\mu) - \psi(\lambda) = \psi(\mu - \lambda) = \psi(\alpha^2) = \psi(\alpha)^2 > 0$, т. е. $\psi(\lambda) < \psi(\mu)$.

Упражнение 2.2 (по анализу). Пусть строго монотонная функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(x) = x$ при $x \in \mathbb{Q}$. Покажите, что $f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, у поля $\mathbb{R}$ тоже нет никаких автоморфизмов кроме тождественного.

Напротив, у поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ имеется нетождественный автоморфизм *комплексного сопряжения* $z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy$. Аналогичные нетривиальные автоморфизмы имеются у всех полей алгебраических чисел[2].

Упражнение 2.3. Покажите что множество чисел $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ является полем и укажите нетождественный автоморфизм этого поля.

2.1.3. Полулинейные отображения. Отображение векторных пространств $F : U \to W$ над полем $\Bbbk$ называется *полулинейным*, если существует такой автоморфизм $\psi : \Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk$, что

$$F(\lambda u + \mu w) = \psi(\lambda)F(u) + \psi(\mu)F(w)$$

для всех векторов $u, w \in U$ и всех чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$. Если автоморфизм $\psi = \mathrm{Id}_{\Bbbk}$ тождественный, то полулиненое отображение является линейным в смысле n° 1.1.1 на стр. 7. В частности, над простыми полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, а также над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ все полулинейные отображения линейны.

Из формул (2-2), (2-3) и лем. 2.1 мы заключаем, что дифференциал $D_\varphi : V \to V$ любого полуаффинного преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ является полулинейным отображением векторных пространств, а если основное поле равно $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{F}_p$, то — линейным отображением. Суммируем сказанное в виде теоремы.

Теорема 2.1
Если биективное преобразование F аффинной плоскости $\mathbb{A}(V)$ переводит прямые в прямые, то существует такое полулинейное биективное преобразование D_φ векторного пространства V, что $\varphi(p) = \varphi(q) + D_\varphi(\overrightarrow{qp})$ для любых двух точек $p, q \in \mathbb{A}(V)$. Над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{F}_p$ преобразование D_φ автоматически является линейным. □

2.2. Аффинные отображения. Отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ между аффинными пространствами, ассоциированными с векторными пространствами U, W, называется *аффинным*, если найдётся такая точка $o \in \mathbb{A}(U)$, что отображение между векторными пространствами

$$D_\varphi : U \to W\,, \quad \overrightarrow{op} \mapsto \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p)} \tag{2-4}$$

линейно, т. е. $D_\varphi(\alpha\overrightarrow{oa} + \beta\overrightarrow{ob}) = \alpha D_\varphi(\overrightarrow{oa}) + \beta D_\varphi(\overrightarrow{ob})$ для любых $\alpha, \beta \in \Bbbk$ и $a, b \in \mathbb{A}(U)$. Из теор. 2.1 вытекает, что любое биективное преобразование аффинной плоскости над полем $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{F}_p$, переводящее прямые в прямые, аффинно.

Лемма 2.2
Если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ аффинно, то отображение (2-4) линейно для каждой точки $o \in \mathbb{A}(U)$ и не зависит от выбора этой точки.

[1] Т. е. для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ неравенство $x_1 < x_2$ влечёт неравенство $\psi(x_1) < \psi(x_2)$.

[2] Т. е. полей, которые содержат поле $\mathbb{Q}$ и линейно порождаются над $\mathbb{Q}$ корнями многочленов с целыми коэффициентами.

Доказательство. Если построенное по некоторой точке $o \in \mathbb{A}(U)$ отображение D_φ из формулы (2-4) линейно, то для любой точки $p \in \mathbb{A}(U)$ и любого вектора $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op} \in U$ выполняется равенство

$$D_\varphi(\overrightarrow{pq}) = D_\varphi(\overrightarrow{oq}) - D_\varphi(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(q)} - \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p)} = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}\,.$$

Тем самым, $D_\varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}$ для всех $p, q \in \mathbb{A}(U)$, т. е. при замене точки o на точку p мы получим то же самое отображение $D_\varphi : U \to W$, что ив точке o. □

Предложение 2.1

Отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ аффинно тогда и только тогда, когда оно переводит барицентрические комбинации точек в барицентрические комбинации их образов с теми же весами, т. е. $\varphi(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \cdots + \mu_m p_m) = \mu_1 \cdot \varphi(p_1) + \mu_2 \cdot \varphi(p_2) + \cdots + \mu_m \cdot \varphi(p_m)$ для любых $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}(U)$ и любых $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \Bbbk$ с $\sum \mu_i = 1$.

Доказательство. Если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ аффинно, то при любом выборе начальной точки o и любых весах $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \Bbbk$ с $\sum \mu_i = 1$

$$\begin{aligned}
&\varphi(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \cdots + \mu_m p_m) = \varphi\left(o + \mu_1 \overrightarrow{op}_1 + \mu_2 \overrightarrow{op}_2 + \cdots + \mu_m \overrightarrow{op}_m\right) = \\
&= \varphi(o) + D_\varphi\left(\mu_1 \overrightarrow{op}_1 + \mu_2 \overrightarrow{op}_2 + \cdots + \mu_m \overrightarrow{op}_m\right) = \\
&= \varphi(o) + \mu_1 \cdot D_\varphi\left(\overrightarrow{op}_1\right) + \mu_2 \cdot D_\varphi\left(\overrightarrow{op}_2\right) + \cdots + \mu_m \cdot D_\varphi\left(\overrightarrow{op}_m\right) = \\
&= \mu_1 \cdot \left(\varphi(o) + D_\varphi\left(\overrightarrow{op}_1\right)\right) + \cdots + \mu_m \cdot \left(\varphi(o) + D_\varphi\left(\overrightarrow{op}_m\right)\right) = \\
&= \mu_1 \cdot \varphi(p_1) + \mu_2 \cdot \varphi(p_2) + \cdots + \mu_m \cdot \varphi(p_m)\,.
\end{aligned}$$

Наоборот, пусть отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ сохраняет барицентрические комбинации. Тогда при любом выборе начальной точки o для всех точек $p, q \in \mathbb{A}(U)$ и чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$ точка

$$r = o + \lambda \cdot \overrightarrow{op} + \mu \cdot \overrightarrow{oq} = (1 - \lambda - \mu)o + \lambda p + \mu q$$

перейдёт в точку $\varphi(r) = (1 - \lambda - \mu)\varphi(o) + \lambda\varphi(p) + \mu\varphi(q) = \varphi(o) + \lambda\,\overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p)} + \mu\,\overrightarrow{\varphi(o)\varphi(q)}$. Зафиксируем точку o и определим отображение $D_\varphi : U \to W$ правилом $D_\varphi(\overrightarrow{or}) = \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(r)}$. Тогда для любой точки r получаем $\varphi(r) = \varphi(o) + D_\varphi(\overrightarrow{or})$, а для всех векторов $\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq} \in U$ и чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$ имеем равенство

$$D_\varphi(\lambda\,\overrightarrow{op} + \mu\,\overrightarrow{oq}) = D_\varphi(\overrightarrow{or}) = \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(r)} = \lambda\,\overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p)} + \mu\,\overrightarrow{\varphi(o)\varphi(q)} = \lambda\,D_\varphi(\overrightarrow{op}) + \mu\,D_\varphi(\overrightarrow{oq})\,,$$

означающее, что отображение $D_\varphi : U \to W$ линейно. □

2.2.1. Дифференциал аффинного отображения. Линейное отображение

$$D_\varphi : U \to W\,, \quad \overrightarrow{pq} \mapsto \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}$$

называется *дифференциалом* аффинного отображения $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$.

Если аффинные отображения $\varphi, \psi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ имеют одинаковый дифференциал, то для всех $p, q \in \mathbb{A}(U)$ выполняется равенство $\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = D_\varphi(\overrightarrow{pq}) = D_\psi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\psi(p)\psi(q)}$. По упр. 1.6 на стр. 13 оно равносильно равенству $\overrightarrow{\varphi(p)\psi(p)} = \overrightarrow{\varphi(q)\psi(q)}$, т. е. вектор $w = \overrightarrow{\varphi(p)\psi(p)}$ не зависит от выбора точки $p \in \mathbb{A}(U)$. Это означает, что $\psi = \tau_w \circ \varphi$ является композицией отображения φ с последующим сдвигом $\tau_w : \mathbb{A}(W) \to \mathbb{A}(W)$, $p \mapsto p + w$, на вектор w.

Предложение 2.2

Если отображения $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(W)$ и $\psi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(V)$ аффинны, то их композиция

$$\varphi \circ \psi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W), \quad x \mapsto \varphi\big(\psi(x)\big),$$

тоже аффинна и имеет дифференциал $D_{\varphi\circ\psi} = D_\varphi \circ D_\psi$.

Доказательство. Отображение $D_{\varphi\circ\psi} : U \to W$, переводящее вектор $\overrightarrow{pq} \in U$ в вектор

$$\overrightarrow{\varphi(\psi(p))\varphi(\psi(q))} = D_\varphi(\overrightarrow{\psi(p)\psi(q)}) = D_\varphi\big(D_\psi(\overrightarrow{pq})\big) \in W,$$

является композицией $D_\varphi \circ D_\psi$ линейных отображений D_φ и D_ψ. Поэтому оно тоже линейно: для любых $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in \Bbbk$ имеем равенства $D_\varphi\big(D_\psi(\alpha a + \beta b)\big) = D_\varphi\big((\alpha D_\psi(a) + \beta D_\psi(b)\big) = \alpha D_\varphi\big(D_\psi(a)\big) + \beta D_\varphi\big(D_\psi(b)\big)$. □

2.3. Запись линейных отображений в координатах. Если в двумерном векторном пространстве V зафиксирован базис e_1, e_2, всякое линейное отображение $\varphi : V \to V$ однозначно задаётся указанием образов базисных векторов $f_1 = \varphi(e_1)$ и $f_2 = \varphi(e_2)$. Произвольный вектор $v = e_1x_1 + e_2x_2$ переходит при этом в вектор

$$\varphi(v) = \varphi(e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2) = \varphi(e_1) \cdot x_1 + \varphi(e_2) \cdot x_2 = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 . \tag{2-5}$$

Упражнение 2.4. Убедитесь, что при любом выборе векторов $f_1, f_2 \in V$ формула (2-5) задаёт *линейное* отображение $\varphi : V \to V$.

Если векторы f_1 и f_2 имеют в базисе (e_1, e_2) координаты $\begin{pmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{pmatrix}$, т. е.

$$f_1 = e_1 \cdot \varphi_{11} + e_2 \cdot \varphi_{21} \quad \text{и} \quad f_2 = e_1 \cdot \varphi_{12} + e_2 \cdot \varphi_{22}, \tag{2-6}$$

то по формуле (2-5) действие отображения φ на произвольный вектор v с координатами $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ задаётся правилом

$$\varphi : \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix}\varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2\\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2\end{pmatrix}, \tag{2-7}$$

которое принято сокращённо записывать как $\boldsymbol{x} \mapsto \Phi_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{x}$, где

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \quad \Phi_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi_{\boldsymbol{e}}x = \begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}\varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2\\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2\end{pmatrix}.$$

При этом используются следующие соглашения: под произведением ab строки a на столбец b, высота которого равна ширине строки, понимается сумма произведений

$$(a_1, a_2, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_s\end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_sb_s, \tag{2-8}$$

а под произведением $P = AB$ таблицы A из m строк ширины s на таблицу B из n столбцов той же самой высоты s понимается таблица из m строк и n столбцов, у которой в пересечении i-той строки и j-того столбца стоит произведение i-той строки таблицы A на j-тый столбец таблицы B, вычисленное по формуле (2-8):

$$p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i1},\, a_{i2},\, \dots\, ,\, a_{is}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{s} a_{i\nu} b_{\nu j}\,. \tag{2-9}$$

Таблицы из m строк и n столбцов принято называть *матрицами* размера $m \times n$. Матрица

$$\Phi_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного отображения* φ в базисе $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2)$, а её определитель

$$\det \Phi_{\boldsymbol{e}} = \det(f_1, f_2) = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}$$

называется *определителем отображения* φ и обозначается $\det \varphi$. Если положить

$$\boldsymbol{e} = (e_1, e_2)\,, \quad \varphi(\boldsymbol{e}) = (f_1, f_2)\,,$$

где в правых частях стоят $1{\times}2$ матрицы из векторов, то две формулы (2-6) свернутся в одно матричное равенство $\varphi(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}\,\Phi_{\boldsymbol{e}}$. Разложение $v = e_1x_1 + e_2x_2$ вектора v по базису $\boldsymbol{e}$ в матричных обозначениях записывается равенством $v = \boldsymbol{e}\boldsymbol{x}$, в котором $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2)$ — строчка из векторов, а $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — столбец из чисел. Линейность отображения $\varphi : V \to V$ означает, что

$$\varphi(v) = \varphi(\boldsymbol{e}\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{e})\boldsymbol{x}\,.$$

Эти равенства являются матричной записью вычисления (2-5). Подставляя $\varphi(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}\,\Phi_{\boldsymbol{e}}$ в правую часть, мы заключаем, что $\varphi(v) = \boldsymbol{e}\,\Phi_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{x}$, т. е. столбец координат вектора $\varphi(v)$ в базисе $\boldsymbol{e}$ равен произведению $\Phi_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{x}$ матрицы $\Phi_{\boldsymbol{e}}$ на столбец $\boldsymbol{x}$.

Следующие далее утверждения мы будем доказывать в предположении, что $\dim V = 2$. В полной общности мы вернёмся к ним чуть позже.

Предложение 2.3
Композиция $\psi \circ \varphi$ линейных отображений $\psi, \varphi : V \to V$ с матрицами $\Psi_{\boldsymbol{e}}$ и $\Phi_{\boldsymbol{e}}$ линейна и имеет матрицу $\Psi_{\boldsymbol{e}}\Phi_{\boldsymbol{e}}$. В частности, умножение 2×2 матриц ассоциативно, т. е. $(AB)C = A(BC)$.

Доказательство. Линейность композиции проверяется непосредственно:

$$\psi\varphi(\lambda u + \mu w) = \psi\big(\varphi(\lambda u + \mu w)\big) = \psi\big(\lambda\varphi(u) + \mu\varphi(w)\big) = \\ = \lambda\psi\big(\varphi(u)\big) + \mu\psi\big(\varphi(w)\big) = \lambda\psi\varphi(u) + \mu\psi\varphi(w)\,.$$

Вычисление: $\psi\big(\varphi(\boldsymbol{e})\big) = \psi(\boldsymbol{e}\cdot\Phi_e) = \psi(\boldsymbol{e})\cdot\Phi_{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}\cdot\Psi_{\boldsymbol{e}}\cdot\Phi_{\boldsymbol{e}}$ показывает, что композиция $\psi\varphi$ имеет в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицу $\Psi_e\Phi_{\boldsymbol{e}}$. Поскольку композиция отображений очевидным образом ассоциативна[1], ассоциативно и умножение матриц. □

[1]Для любых трёх отображений $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, $\gamma : C \to D$ обе композиции $(\gamma\beta)\alpha$ и $\gamma(\beta\alpha)$ действуют на каждую точку $a \in A$ по одному и тому же правилу $a \mapsto \gamma\Big(\beta\big(\alpha(a)\big)\Big)$.

Предложение 2.4
Для любой формы площади $s : V \times V \to \Bbbk$ и любых векторов $v_1, v_2 \in V$

$$s\big(\varphi(v_1), \varphi(v_2)\big) = s(v_1, v_2) \cdot \det \Phi_{\boldsymbol{e}} . \tag{2-10}$$

В частности, определитель $\det \varphi = \det \Phi_{\boldsymbol{e}} = s\big(\varphi(v_1), \varphi(v_2)\big) / s(v_1, v_2)$ зависит от φ и не зависит от базиса $\boldsymbol{e}$. Линейное отображение $\varphi : V \to V$ биективно если и только если $\det \varphi \neq 0$.

Доказательство. Образуем из векторов v_1 и v_2 матрицу $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ размера 1×2. Тогда $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ev}}$, где $C_{\boldsymbol{ev}}$ — числовая матрица размера 2×2, столбцы которой являются столбцами координат векторов v_1, v_2 в базисе $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2)$. Поскольку отображение φ линейно $\big(\varphi(v_1), \varphi(v_2)\big) = \varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ev}}) = \varphi(\boldsymbol{e})\, C_{\boldsymbol{ev}} = (f_1, f_2)\, C_{\boldsymbol{ev}}$, где $(f_1, f_2) = \big(\varphi(e_1), \varphi(e_2)\big) = (e_1, e_2)\, \Phi_{\boldsymbol{e}}$. По сл. 1.2 на стр. 12 для любой ненулевой формы площади s на V выполняются равенства

$$s\big(\varphi(v_1), \varphi(v_2)\big) = s(f_1, f_2)\, \det C_{\boldsymbol{ev}} = s(e_1, e_2)\, \det \Phi_{\boldsymbol{e}}\, \det C_{\boldsymbol{ev}} .$$

Так как $s(e_1, e_2)\, \det C_{\boldsymbol{ev}} = s(v_1, v_2)$, мы получаем (2-10). Если $\det \Phi_{\boldsymbol{e}} = \det(f_1, f_2) \neq 0$, то пара векторов $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ тоже является базисом в V. Отображение φ переводит вектор $u = \boldsymbol{ex}$ со столбцом координат $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ в вектор $\varphi(u) = \varphi(\boldsymbol{e})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{fx}$ с тем же самым столбцом координат x, но только в базисе $\boldsymbol{f}$. Тем самым, оно биективно. Если же $\det(f_1, f_2) = 0$, то $f_1 = \lambda f_2$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, откуда $\varphi(e_1) = \varphi(\lambda e_2)$. Поскольку $e_1 \neq \lambda e_2$, отображение φ не биективно. □

Упражнение 2.5. Докажите для 2×2 матриц A и B равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

2.4. Запись аффинных отображений в координатах. Зафиксируем в аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ над двумерным векторным пространством V координатный репер $(o;\ e_1, e_2)$. Пусть аффинное отображение $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ переводит его начальную точку o в точку $b = \varphi(o)$ с координатами $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, а дифференциал $D_\varphi : V \to V$ имеет в базисе $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2)$ матрицу

$$\Phi_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} .$$

Тогда действие отображения φ на произвольную точку с координатами $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ описывается матричной формулой $\varphi : \boldsymbol{x} \mapsto b + \Phi_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{x}$, которая в развёрнутом виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \beta_2 + \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix} .$$

Упражнение 2.6. Убедитесь в этом, и выясните, как аффинное преобразование $x \mapsto b + Ax$ изменяет площади ориентированных параллелограммов.

Мы заключаем, что аффинное отображение плоскости однозначно задаётся своим действием на произвольно выбранный аффинный репер: для любого аффинного репера $(p;\ e_1, e_2)$, любой точки q и любых векторов f_1, f_2 существует единственное такое аффинное отображение φ, что $\varphi(p) = q$, $D_\varphi(e_1) = f_1$, $D_\varphi(e_2) = f_2$.

2.5. Аффинная группа. Биективные аффинные отображения $\mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ называются *аффинными автоморфизмами* или *аффинными преобразованиями*. Они образуют группу преобразований[1], которая обозначается $\mathrm{Aff}(V)$ и называется *аффинной группой* векторного пространства V. Аффинная группа координатного пространства $\Bbbk^n$ обозначается $\mathrm{Aff}_n(\Bbbk)$.

2.5.1. Сравнение аффинной и линейной групп. Аффинная группа $\mathrm{Aff}(V)$ содержит подгруппу *параллельных переносов* или *сдвигов* $T \subset \mathrm{Aff}(V)$, изоморфную аддитивной группе векторов пространства V. Вектору $v \in V$ отвечает при этом изоморфизме сдвиг

$$\tau_v : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V), \quad p \mapsto p + v,$$

а композиции сдвигов отвечает сложение векторов: $\tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w}$. Поскольку для любого аффинного преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ и произвольной точки $p \in \mathbb{A}(V)$ выполняются равенства $\varphi\big(\tau_v(p)\big) = \varphi(p+v) = \varphi(p) + D_\varphi(v) = \tau_{D_\varphi(v)}\big(\varphi(p)\big)$ сдвиги τ_v коммутируют с произвольными аффинными преобразованиями по правилу

$$\varphi \circ \tau_v = \tau_{D_\varphi(v)} \circ \varphi \quad \text{или} \quad \varphi \circ \tau_v \circ \varphi^{-1} = \tau_{D_\varphi(v)}. \tag{2-11}$$

Множество всех аффинных преобразований, оставляющих на месте произвольно выбранную точку $p \in \mathbb{A}^2$, образует в $\mathrm{Aff}(V)$ подгруппу, которая называется *стабилизатором* точки p и обозначается

$$\mathrm{Stab}_p \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in \mathrm{Aff}(V) \mid \varphi(p) = p\}.$$

Аффинное преобразование $\varphi \in \mathrm{Stab}_p$ действует на произвольную точку $q \in \mathbb{A}(V)$ по правилу $\varphi(q) = p + D_\varphi(\overrightarrow{pq})$. В частности, два аффинных преобразования $\varphi, \psi \in \mathrm{Stab}_p$ совпадают если и только если $D_\varphi = D_\psi$. Таким образом, мы имеем инъективное отображение

$$D : \mathrm{Stab}_p \to \mathrm{GL}(V), \quad \varphi \mapsto D_\varphi, \tag{2-12}$$

переводящее аффинное преобразование в его дифференциал. Это отображение является изоморфизмом групп, поскольку каждый линейный автоморфизм $F : V \xrightarrow{\sim} V$ является дифференциалом аффинного преобразования

$$F_p : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V), \quad x \mapsto p + F(\overrightarrow{px}), \tag{2-13}$$

оставляющего точку p на месте.

Предложение 2.5
Зафиксируем произвольным образом точку $p \in \mathbb{A}(V)$. Тогда для каждого аффинного преобразования $\varphi \in \mathrm{Aff}(V)$ существуют единственные такие вектор $v \in V$ и линейный автоморфизм $F \in \mathrm{GL}(V)$, что $\varphi = \tau_v \circ F_p$. При этом для всех $u, w \in V$ и всех $F, G \in \mathrm{GL}(V)$

$$\big(\tau_u \circ F_p\big) \circ \big(\tau_w \circ G_p\big) = \tau_{u+F(w)} \circ (F \circ G)_p. \tag{2-14}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(p) = q$. Тогда $\varphi = \tau_v \circ \psi$, где $v = \overrightarrow{pq}$ и $\psi = \tau_{-v} \circ \varphi \in \mathrm{Stab}_p$. Тем самым, $\psi = F_p$ для некоторого линейного преобразования $F \in \mathrm{GL}(V)$. Если аффинное преобразование φ допускает два разложения $\tau_v \circ F_p = \varphi = \tau_u \circ G_p$, то применяя к правой и левой частям этого равенства обратный к τ_v сдвиг τ_{-v}, заключаем, что $F_p = \tau_{u-v} \circ G_p$. Так как и F_p, и

[1]См. обсуждение на стр. 4

G_p оставляют точку p на месте, сдвиг τ_{u-v} переводит точку p в себя, откуда $u = v$ и $\tau_{u-v} = \mathrm{Id}$. Поэтому $F_p = G_p$ и $F = G$. Соотношение (2-14) вытекает из формулы (2-11) :

$$\tau_u \circ F_p \circ \tau_w \circ G_p = \tau_u \circ F_p \circ \tau_w \circ F_p^{-1} \circ F_p \circ G_p = \tau_u \circ \tau_{F_p(w)} \circ F_p \circ G_p\,.$$

□

Замечание 2.1. Из предл. 2.5 вытекает, что фиксация точки p аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ позволяет отождествить множество $\mathrm{Aff}(V)$ с прямым произведением множеств $V \times \mathrm{GL}(V)$ так, что имеющаяся в группе $\mathrm{Aff}(V)$ композиция будет задаваться в терминах $V \times \mathrm{GL}(V)$ правилом

$$(u, F) \circ (w, G) = (u + F(w), FG)\,.$$

В этой ситуации говорят, что группа $\mathrm{Aff}(V)$ является *полупрямым произведением* групп V и $\mathrm{GL}(V)$, и пишут $\mathrm{Aff}(V) = V \rtimes \mathrm{GL}(V)$. Обратите внимание, что отождествление множества $\mathrm{Aff}(V)$ с множеством $V \times \mathrm{GL}(V)$ требует выбора точки $p \in \mathbb{A}(V)$, и два разложения $\tau_u \circ F_p = \varphi = \tau_w \circ F_q$ одного и того же аффинного преобразования $\varphi \in \mathrm{Aff}(V)$, возникающие при фиксации разных точек $p, q \in \mathbb{A}(V)$, имеют один и тот же линейный автоморфизм $F = D_{F_p} = D_{F_q} = D_\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, но, вообще говоря, разные сдвиги $\tau_u \neq \tau_w$.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что $w = u - \overrightarrow{pq} + D_\varphi(\overrightarrow{pq})$ и что этот вектор отличен от u если $D_\varphi(\overrightarrow{pq}) \neq \overrightarrow{pq}$.

2.5.2. Аффинная конгруэнтность фигур. Две фигуры в аффинном пространстве называются *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинный автоморфизм, переводящий одну их этих фигур в другую.

Следствие 2.1

Для любых треугольников $\triangle p_0p_1p_2$, $\triangle q_0q_1q_2$ на аффинной плоскости существует единственное аффинное преобразование этой плоскости, переводящее p_i в q_i при всех $i = 0, 1, 2$.

Доказательство. Как мы видели выше, имеется единственное такое аффинное отображение

$$\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)\,,$$

что $\varphi(p_0) = q_0$ и $D_\varphi(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{q_0q_1}$, $D_\varphi(\overrightarrow{p_0p_2}) = \overrightarrow{q_0q_2}$. Произвольная точка $y \in \mathbb{A}(V)$ с радиус вектором $\overrightarrow{q_0y} = \lambda\overrightarrow{q_0q_1} + \mu\overrightarrow{q_0q_1}$ является при этом образом единственной точки $x \in \mathbb{A}(V)$ с радиус вектором $\overrightarrow{p_0x} = \lambda\overrightarrow{p_0p_1} + \mu\overrightarrow{p_0p_1}$. □

Следствие 2.2

Аффинные преобразования плоскости переводят прямые в прямые, сохраняя параллельность. Любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 переводятся в любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые $\ell_0', \ell_1', \ell_2'$ единственным аффинным преобразованием. □

Предложение 2.6

Если три различные прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 пересекаются в точке o, а три различные прямые ℓ_0', ℓ_1', ℓ_2' пересекаются в точке o', то существует аффинное преобразование, переводящее ℓ_i в ℓ_i' при всех $i = 0, 1, 2$. Такое преобразование единственно с точностью до композиции с гомотетиями относительно точек o и o'.

Доказательство. Зафиксируем на всех прямых ℓ_i и ℓ'_i направляющие векторы v_i и v'_i. Тогда

$$v_0 = x_1 v_1 + x_2 v_2\,, \quad v'_0 = x_1 v'_1 + x_2 v'_2\,, \tag{2-15}$$

где все четыре числа $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \Bbbk$ отличны от нуля. Аффинное преобразование φ переводит прямые ℓ_1, ℓ_2, соответственно, в прямые ℓ'_1, ℓ'_2 если и только если $\varphi(o) = o'$ и $D_\varphi(v_1) = \lambda_1 v'_1$, $D_\varphi(v_2) = \lambda_2 v'_2$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Bbbk$. Такое преобразование переводит прямую ℓ_0 в ℓ'_0 если и только если $D_\varphi(v_0) = \mu v'_0$ для некоторого $\mu \in \Bbbk$. Подставляя в это равенство разложения (2-15) и пользуясь линейностью D_φ, заключаем что $\lambda_1 x_1 = \mu x'_1$ и $\lambda_2 x_2 = \mu x'_2$, откуда числа $\lambda_1 = \mu x_1/x'_1$ и $\lambda_2 = \mu x_2/x'_2$ определяются однозначно с точностью до умножения на константу μ. Поскольку преобразование φ однозначно задаётся этими числами, оно существует и единственно с точностью до гомотетии с центром в точке o или o'. □

Упражнение 2.8. Пусть три различные прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 пересекаются в точке o. Покажите, что существует такая тройка точек $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2, p_3 \in \ell_3$, что $\overrightarrow{op_3} = \overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{op_2}$, и любые две такие тройки получаются друг из друга гомотетией с центром в o. Получите отсюда другое доказательство предл. 2.6

2.6. Двойные отношения. Две четвёрки конкурентных[1] прямых на аффинной плоскости не всегда аффинно конгуэнтны. Полным инвариантом, характеризующим четыре пересекающиеся в точке o прямые $\ell_1 = (op_1)$, $\ell_2 = (op_2)$, $\ell_3 = (op_3)$, $\ell_4 = (op_4)$ с точностью до аффинного преобразования является их *двойное отношение*[2]

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] \overset{\text{def}}{=} \frac{s(op_1p_3)}{s(op_2p_3)} : \frac{s(op_1p_4)}{s(op_2p_4)} = \frac{s(\overrightarrow{op}_1, \overrightarrow{op}_3)}{s(\overrightarrow{op}_2, \overrightarrow{op}_3)} : \frac{s(\overrightarrow{op}_1, \overrightarrow{op}_4)}{s(\overrightarrow{op}_2, \overrightarrow{op}_4)}\,. \tag{2-16}$$

Упражнение 2.9. Убедитесь, что двойное отношение не зависит ни от выбора ненулевой функции площади s, ни от выбора отличных от o точек $p_i \in \ell_i$, а также не меняется, если как-либо разбить четвёрку на две пары и одновременно переставить между собою прямые в каждой из пар: $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell_2, \ell_1, \ell_4, \ell_3] = [\ell_3, \ell_4, \ell_1, \ell_2] = [\ell_4, \ell_3, \ell_2, \ell_1]$.

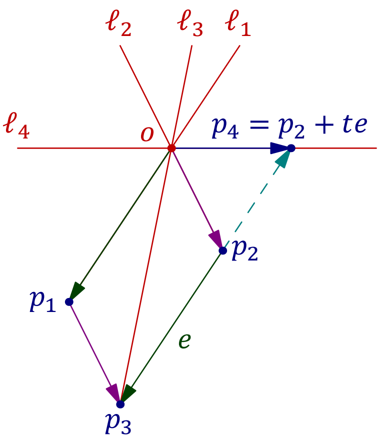

Рис. 2⋄3. $t = [\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$.

Расположим тройку точек p_1, p_2, p_3 так, чтобы четырёхугольник $op_1p_3p_2$ оказался параллелограммом, как в упр. 2.8, а в качестве p_4 возьмём точку пересечения прямой ℓ_4 с прямой (p_1p_3), см. рис. 2⋄3. Тогда $p_4 = p_2 + t \cdot \overrightarrow{p_2p_3}$, где число $t = \overrightarrow{p_2p_4}/\overrightarrow{p_2p_3}$ является аффинной координатой точки p_4 на прямой (p_2p_3) относительно репера с началом p_2 и базисным вектором $e = \overrightarrow{p_2p_3}$. Положение четвёртой прямой однозначно характеризуется этой координатой в том смысле, что отображение $\ell_4 \mapsto t$ устанавливает биекцию между множеством всех проходящих через точку o прямых ℓ_4 и множеством $\Bbbk \sqcup \infty$. Прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 при этом соответствуют значения $t = \infty, 0, 1$. С

[1] Т. е. пересекающихся в одной точке.

[2] По-английски *cross-ratio*.

другой стороны

$$
\begin{aligned}
[\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4] &= \frac{s(\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_3)}{s(\overrightarrow{op}_3,\overrightarrow{op}_2)} : \frac{s(\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_4)}{s(\overrightarrow{op}_4,\overrightarrow{op}_2)} = \\
&= \frac{s(\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_1+\overrightarrow{op}_2)}{s(\overrightarrow{op}_1+\overrightarrow{op}_2,\overrightarrow{op}_2)} : \frac{s(\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_2+t\overrightarrow{op}_1)}{s(\overrightarrow{op}_2+t\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_2)} = \\
&= \frac{s(\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_2)}{s(\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_2)} : \frac{s(\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_2)}{t\cdot s(\overrightarrow{op}_1,\overrightarrow{op}_2)} = t\,.
\end{aligned}
\tag{2-17}
$$

Таким образом, двойное отношение $t = [\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4]$ принимает все значения из поля $\mathbb{k}$, а также значение ∞ и однозначно характеризует положение четвёртой прямой по отношению к первым трём. Если $[\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4] = -1$, то прямая ℓ_2 пересекает любую параллельную ℓ_1 прямую ℓ_1' в середине отрезка, высекаемого из ℓ_1' прямыми ℓ_3 и ℓ_4. Такие четвёрки конкурентных прямых называют *гармоническими*.

Упражнение 2.10. Покажите, что гармоничность равносильна тому, что двойное отношение не меняется при перестановке первых двух точек: $[\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4] = [\ell_2,\ell_1,\ell_3,\ell_4]$.

Предложение 2.7
Четыре различные конкурентные прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 переводятся в четыре различные конкурентные прямые ℓ_1', ℓ_2', ℓ_3', ℓ_4' если и только если $[\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4] = [\ell_1',\ell_2',\ell_3',\ell_4']$.

Доказательство. Обозначим точки пересечения четвёрок прямых через o и o'. По упр. 2.8 существуют такие тройки точек $p_i \in \ell_i$ и $p_i' \in \ell_i'$, где $i = 1,2,3$, что четырёхугольники $op_1p_3p_2$ и $o'p_1'p_3'p_2'$ являются параллелограммами, причём эти тройки единственны с точностью до гомотетий с центрами o и o'. Аффинное преобразование, переводящее параллелограмм $op_1p_3p_2$ в параллелограмм $o'p_1'p_3'p_2'$ является по предл. 2.6 единственным с точностью до гомотетий с центрами o и o' аффинным преобразованием, переводящим прямую ℓ_i в прямую ℓ_i' при $i = 1,2,3$. Оно переводит прямую ℓ_4 в прямую ℓ_4' если и только если точка $p_4 = \ell_4 \cap (p_2p_3)$ делит точки p_2, p_3 в том же отношении, что точка $p_4' = \ell_4' \cap (p_2'p_3c')$ делит точки p_2', p_3'. Согласно (2-17) эти отношения равны двойным отношениям $[\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4]$ и $[\ell_1',\ell_2',\ell_3',\ell_4']$. □

2.6.1. Двойное отношение четырёх коллинеарных точек. Если в форм. (2-16) на стр. 30 расположить все четыре точки p_i на одной не проходящей через точку o прямой ℓ, как на рис. 2⋄4, то двойное отношение площадей треугольников в формуле (2-16) можно переписать как двойное отношение четырёх пропорциональных векторов[1]

$$\frac{s(op_1p_3)}{s(op_2p_3)} : \frac{s(op_1p_4)}{s(op_2p_4)} = \frac{\overrightarrow{p_1p_3}}{\overrightarrow{p_2p_3}} : \frac{\overrightarrow{p_1p_4}}{\overrightarrow{p_2p_4}}\,.$$

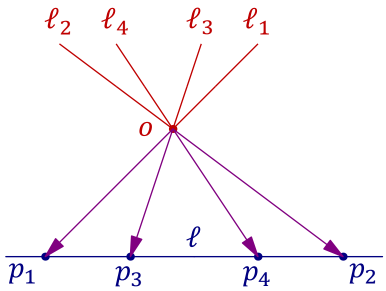

Рис. 2⋄4.

Правая часть этого равенства обозначается

$$[p_1,p_2,p_3,p_4] \overset{\text{def}}{=} \frac{\overrightarrow{p_1p_3}}{\overrightarrow{p_2p_3}} : \frac{\overrightarrow{p_1p_4}}{\overrightarrow{p_2p_4}}$$

и называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки коллинеарных точек p_1,p_2,p_3,p_4. Такая четвёрка называется *гармонической*, если $[p_1,p_2,p_3,p_4] = -1$.

[1]См. упр. 1.10 на стр. 19.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.1. Вычитая $\psi(0)$ из правой и левой части равенства $\psi(0) = \psi(0+0) = \psi(0)+\psi(0)$, получаем $0 = \psi(0)$. Поскольку $\psi(\mu)+\psi(-\mu) = \psi(\mu-\mu) = \psi(0) = 0$, имеет место равенство $\psi(-\mu) = -\psi(\mu)$. Поэтому $\psi(\lambda-\mu) = \psi(\lambda)+\psi(-\mu) = \psi(\lambda)-\psi(\mu)$. Если $\psi(1) \neq 0$, то аналогичным образом умножая на $\psi(1)^{-1}$ обе части равенства $\psi(1) = \psi(1 \cdot 1) = \psi(1) \cdot \psi(1)$ получаем $\psi(1) = 1$, откуда, как и выше, $\psi(\mu^{-1}) = \psi(\mu)^{-1}$ и $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$ при всех λ и $\mu \neq 0$. Если же $\psi(1) = 0$, то $\psi(\lambda) = \psi(1 \cdot \lambda) = \psi(1) \cdot \psi(\lambda) = 0$ для всех λ.

Упр. 2.3. Обратным к $x + y\sqrt{2}$ числом является $\frac{x}{x^2-2y^2} - \frac{y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}$, нетривиальный автоморфизм переводит $x + y\sqrt{2}$ в $x - y\sqrt{2}$.

Упр. 2.5. Рассмотрите в координатном пространстве $\Bbbk^2$ с базисом (e_1, e_2) пару векторов $(f_1, f_2) = (e_1, e_2)\,A$ и пару векторов $(g_1, g_2) = (f_1, f_2)\,B = (e_1, e_2)\,AB$. Тогда по сл. 1.2 для любой ненулевой формы площади s на V выполняются равенства

$$s(f_1, f_2) = s(e_1, e_2)\,\det A\,,\;\; s(g_1, g_2) = s(f_1, f_2)\,\det B\,,\;\; s(g_1, g_2) = s(e_1, e_2)\,\det(AB)\,,$$

из которых вытекает, что $\det(A)\det(B) = \det(AB)$.

Упр. 2.6. Все площади умножаются на $\det A$, ср. с предл. 2.4 на стр. 27.

Упр. 2.7. Это следует из равенства $q + w = \varphi(q) = p + u + D_\varphi(\overrightarrow{pq})$.

Упр. 2.8. Условие $\overrightarrow{op_3} = \overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{op_2}$ означает, что четырёхугольник $op_1p_3p_2$ является параллелограммом, т. е. прямые (p_1p_3) и (p_2p_3) параллельны прямым $\ell_2 = (op_23)$ и $\ell_1 = (op_1)$ соответственно. Но для любой точки $p_1 \in \ell_1$ имеется единственная проходящая через p_1 прямая, параллельная прямой ℓ_2, и она пересекает прямую ℓ_3 в единственной точке p_3. Через точку p_3 проходит единственная прямая, параллельная прямой ℓ_1, и она пересекает прямую ℓ_2 в единственной точке p_2. Таким образом, параллелограмм $op_1p_3p_2$ однозначно определяется выбором точки $p_1 \in \ell_1$. При выборе другой точки p_1' с радиус-вектором $\overrightarrow{op}_1' = \lambda\overrightarrow{op}_1$ определяемый ею параллелограмм $op_1'p_3'p_2'$ получается из параллелограмма $op_1p_3p_2$ гомотетией с коэффициентом λ относительно точки o.

Упр. 2.9. При замене функции s на λs или любого из векторов $\overrightarrow{op}_i$ на $\lambda\overrightarrow{op}_i$, где $\lambda \neq 0$, коэффициент λ сократится. Неизменность двойного отношения при одновременной перестановке двух пар прямых видна непосредственно из формулы форм. (2-16) на стр. 30.

Упр. 2.10. Прямо из определения двойного отношения вытекает равенство

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = \frac{1}{[\ell_2, \ell_1, \ell_3, \ell_4]}\,,$$

из которого всё и следует.