Задачи для подготовки к контрольной №7

ПК7⋄1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ определите типы гладких евклидовых коник и для центральных коник найдите центры и направления главных осей, а для парабол — направление оси и вершину.

а) $20x^2 + 52xy - 20x + 34y^2 - 24y + 9 = 0$
б) $-16x^2 - 76xy - 8x - 90y^2 - 20y - 1 = 0$
в) $-7x^2 + 20xy + 2x - 14y^2 - 4y = 0$
г) $20x^2 - 52xy + 32x + 34y^2 - 40y + 15 = 0$
д) $-x^2 - 4xy - 6x - 4y^2 - 8y + 3 = 0$
е) $-4x^2 - 12xy - 4x - 9y^2 - 8y + 4 = 0.$

ОТВЕТ: в (а) эллипс с центром $(7, -5)$ и осями вдоль векторов $\left(-\frac{7}{26} + \frac{5\sqrt{29}}{26} : 1\right)$ и $\left(-\frac{5\sqrt{29}}{26} - \frac{7}{26} : 1\right)$;
в (б) гипербола с центром $(-5, 2)$ и осями вдоль векторов $\left(-\frac{37}{38} + \frac{\sqrt{2813}}{38} : 1\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{2813}}{38} - \frac{37}{38} : 1\right)$;
в (в) гипербола с центром $(3, 2)$ и осями вдоль векторов $\left(\frac{7}{20} + \frac{\sqrt{449}}{20} : 1\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{449}}{20} + \frac{7}{20} : 1\right)$;
в (г) эллипс с центром $(-6, -4)$ и осями вдоль векторов $\left(\frac{7}{26} + \frac{5\sqrt{29}}{26} : 1\right)$ и $\left(-\frac{5\sqrt{29}}{26} + \frac{7}{26} : 1\right)$;
в (д) парабола с осью $(-4 : 2)$ и вершиной $(\frac{87}{25}, -\frac{71}{25})$;
в (е) парабола с осью $(6 : -4)$ и вершиной $(-\frac{731}{169}, \frac{418}{169})$.

ПК7⋄2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ определите тип (5 баллов), укажите начальную точку (5 баллов) и направления координатных осей канонического ортонормального репера (5 баллов) и напишите в нём уравнение квадрики (5 баллов), заданной в стандартном ортонормальном базисе уравнением

а) $14x^2 + 4xy - 8xz - 48x + 17y^2 + 4yz - 12y + 14z^2 + 96z = -162$
б) $5x^2 - 4xy - 4xz + 18x + 2y^2 - 8yz + 2z^2 = -3$
в) $-19x^2 + 28xy - 56xz + 150x + 2y^2 + 28yz - 48y - 19z^2 + 150z = 180$
г) $11x^2 - 20xy + 4xz - 60x + 14y^2 + 16yz + 30y + 20z^2 + 21z = -18$
д) $4x^2 + 8xy - 12xz - 14x - 4yz + 8y + 5z^2 + 26z = 27$
е) $4x^2 - 28xy + 4xz - 12x + 13y^2 - 32yz - 48y + 19z^2 + 66z = -63$

ОТВЕТ: в (а) эллипсоид $\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(2/3,\ 2/3,\ -10/3)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (2/3,\ -1/3,\ 2/3)$, $e_2 = (-1/3,\ 2/3,\ 2/3)$, $e_3 = (-2/3,\ -2/3,\ 1/3)$.
в (б) связный гиперболоид $x_1^2 + x_2^2 - \frac{x_3^2}{2} = 1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(-1,\ 1,\ 1)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (-2/3,\ 2/3,\ -1/3)$, $e_2 = (2/3,\ 1/3,\ -2/3)$, $e_3 = (-1/3,\ -2/3,\ -2/3)$.
в (в) несвязный гиперболоид $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - 3x_3^2 = -1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(1,\ -2,\ 1)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (1/3,\ -2/3,\ -2/3)$, $e_2 = (2/3,\ 2/3,\ -1/3)$, $e_3 = (2/3,\ -1/3,\ 2/3)$.
в (г) эллиптический параболоид $3x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 0$ в ортонормальном репере с началом в точке $(1/3,\ -5/3,\ 1/3)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (-2/3,\ -2/3,\ 1/3)$, $e_2 = (-2/3,\ 1/3,\ -2/3)$, $e_3 = (1/3,\ -2/3,\ -2/3)$.
в (д) гиперболический параболоид $3x_1 + 2x_2^2 - \frac{x_3^2}{2} = 0$ в ортонормальном репере с началом в точке $(2/3,\ 7/3,\ 1/3)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (1/3,\ 2/3,\ 2/3)$, $e_2 = (-2/3,\ -1/3,\ 2/3)$, $e_3 = (2/3,\ -2/3,\ 1/3)$.
в (е) конус $2x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_3^2}{2} = 0$ в ортонормальном репере с началом в точке $(1/3,\ -2/3,\ -7/3)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (1/3,\ -2/3,\ 2/3)$, $e_2 = (2/3,\ -1/3,\ -2/3)$, $e_3 = (2/3,\ 2/3,\ 1/3)$.

ПК7⋄3. Центр c_1 сферы радиуса 3 находится на расстоянии 8 от центра c_2 сферы радиуса 10. Опишите все инверсии, переводящие первую сферу во вторую.

ОТВЕТ: две инверсии с центрами в точках $c_1 + x_{\pm}\overrightarrow{c_1c_2}$, где $x_+ = -\frac{3}{7}$, $x_- = \frac{3}{13}$ и радиусами $r_+ = \frac{15\sqrt{2}}{7}$ и $r_- = \frac{15\sqrt{14}}{13}$.

ПК7⋄4. Центр b сферы B радиуса $\sqrt{2}$ находится на расстоянии 4 от центра a сферы A радиуса $\sqrt{3}$. Опишите все инверсии, переводящие эти две сферы в пару концентрических сфер.

Ответ: инверсии относительно сфер произвольных радиусов с центрами в точках $a + x_\pm \underleftarrow{ab}$ где $x_+ = \frac{\sqrt{97}}{32} + \frac{17}{32}$, $x_- = \frac{17}{32} - \frac{\sqrt{97}}{32}$.

ПК7⋄5. Центр b сферы B радиуса 1 находится на расстоянии $\sqrt{2}$ от центра a сферы A радиуса $\sqrt{14}$. Найдите все неподвижные точки композиции инверсий $\sigma_B \circ \sigma_A$ относительно этих сфер.

Ответ: $a + x_\pm \underleftarrow{ab}$ где $x_+ = \frac{\sqrt{113}}{4} + \frac{15}{4}$, $x_- = \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{113}}{4}$.