Задачи для подготовки к контрольной № 5

ПК5⋄1. Билинейная форма $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 20 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & -8 & 43 \end{pmatrix}.$$

Существует ли в $\mathbb{C}^3$ такой базис, где эта форма имеет матрицу Грама

а) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & 20 \\ -13 & 21 & -35 \\ 14 & -21 & 44 \end{pmatrix}$? **б)** $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 7 \\ -3 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$?

ОТВЕТ: в (а) — нет, в (б) — да; канонический оператор исходной формы $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} -13 & 17 & -91 \\ 20 & -25 & 136 \\ 6 & -7 & 39 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1)$; в (б) канонический оператор $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -8 & 6 & -9 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ имеет такой же характеристический многочлен, в (а) канонический оператор $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} -81 & 112 & -238 \\ -34 & 47 & -100 \\ 10 & -14 & 29 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3 + 5t^2 - 5t - 1 = (t-1)(t^2+6t+1)$.

ПК5⋄2. Билинейная форма $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 7 & 19 & 12 \\ 12 & 37 & 23 \\ 8 & 24 & 15 \end{pmatrix}.$$

Существует ли в $\mathbb{C}^3$ такой базис, где эта форма имеет матрицу Грама

а) $\begin{pmatrix} 7 & -5 & -19 \\ -4 & 3 & 10 \\ -23 & 16 & 66 \end{pmatrix}$? **б)** $\begin{pmatrix} 6 & -17 & 10 \\ -21 & 61 & -33 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$?

ОТВЕТ: в (а) — да, в (б) — нет; канонический оператор исходной формы $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} -6 & -14 & -9 \\ -5 & -10 & -7 \\ 12 & 25 & 17 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1)$; в (а) канонический оператор $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 14 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ имеет такой же характеристический многочлен, в (б) канонический оператор $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} -35 & 158 & 46 \\ -8 & 37 & 12 \\ 8 & -34 & -7 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3 + 5t^2 - 5t - 1 = (t-1)(t^2+6t+1)$.

ПК5⋄3. Выясните, вырождено ли ограничение билинейной формы на $\mathbb{Q}^4$ с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 8 & 8 \\ 5 & -10 & -13 & -12 \\ 8 & -13 & -18 & -17 \\ 8 & -12 & -17 & -16 \end{pmatrix}$$

на подпространство U решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

и если нет, найдите проекцию вектора $(10, 3, -10, 12)$ на $U^\perp$ вдоль U и на U вдоль $U^\perp$.

ответ: $v_U = (7, -3, 5, 0)$, $v_{U^\perp} = (3, 6, -15, 12)$.

ПК5◇4. Те же вопросы про

а) форму $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ -7 & -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ и вектор $(-10, 8, 7, 5)$

б) форму $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 0 & -11 \\ 5 & -9 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ и вектор $(3, -3, -5, -4)$

в) форму $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -9 & 11 \\ -5 & 4 & 6 & -7 \\ -9 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -7 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ и вектор $(15, 14, 2, 9)$

ответ: в (а) $v_U = (0, 4, -1, 1)$, $v_{U^\perp} = (-10, 4, 8, 4)$, в (б) $v_U = (-4, -9, -6, -2)$, $v_{U^\perp} = (7, 6, 1, -2)$, в (в) $v_U = (3, 2, -1, 0)$, $v_{U^\perp} = (12, 12, 3, 9)$.

ПК5◇5. В $\mathbb{R}^4$ найдите ранг и сигнатуру ограничения квадратичной формы

а) $-4x_1^2 - 25x_2^2 - 2x_3^2 - 11x_4^2 + 20x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 16x_2x_4 + 2x_3x_4$ на ортогонал[1] к вектору $(0, 3, 0, -7)$

б) $x_1^2 - 3x_2^2 + 8x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 8x_3x_4$ на ортогонал к вектору $(4, 5, 2, 3)$

в) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 25x_3^2 + 18x_4^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 - 14x_2x_3 + 12x_2x_4 - 42x_3x_4$ на ортогонал к вектору $(1, 2, -2, -3)$.

ответ: в (а) ранг 3 сигнатура $(1, 2)$, в (б) ранг 2 сигнатура $(2, 0)$, в (в) ранг 3 сигнатура $(2, 1)$.

ПК5◇6. Существует ли на $\mathbb{R}^6$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

а) $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 < 0$

б) $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 < 0$

в) $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$, $\Delta_5 > 0$, $\Delta_6 = 0$

г) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 > 0$?

Если да, найдите её ранг, сигнатуру и приведите пример матрицы Грама с такими минорами. Если нет, обстоятельно объясните, почему.

ответ: форм с минорами (б) и (г) нет, форма в (а) имеет ранг 6 и сигнатуру $(3, 3)$, в (в) — ранг 5 и сигнатуру $(3, 2)$.

ПК5◇7. Существует ли **а)** линейная обратимая **б)** ортогональная[2] замена координат в $\mathbb{R}^3$, переводящая квадратичную форму $x_1^2 - 11/9x_2^2 + 2/9x_3^2 + 32/9x_1x_2 - 16/9x_1x_3 + 8/3x_2x_3$ в квадратичную форму $-1/3x_1^2 - 2/3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8/3x_1x_3 - 4/3x_2x_3$?

ответ: формы ортогонально эквивалентны, их матрицы Грама имеют одинаковые хар. многочлены: $t^3 - 7t + 6 = (t-2)(t-1)(t+3)$.

ПК5◇8. Те же вопросы про квадратичные формы

а) $-1/9x_1^2 - 7/9x_2^2 - 1/9x_3^2 + 8/9x_1x_2 - 16/9x_1x_3 - 8/9x_2x_3$ и $1/9x_1^2 - 14/9x_2^2 - 5/9x_3^2 + 4/9x_1x_2 - 32/9x_1x_3 - 28/9x_2x_3$

б) $10/9x_1^2 + 13/9x_2^2 + 13/9x_3^2 - 4/9x_1x_2 - 4/9x_1x_3 + 8/9x_2x_3$ и $11/9x_1^2 - 2/9x_2^2 - x_3^2 - 8/3x_1x_2 + 32/9x_1x_3 - 16/9x_2x_3$.

ответ: В (а) формы линейно эквивалентны, а ортогонально — нет; хар. многочлены матриц Грама: $t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)(t+1)^2$ и $t^3 + 2t^2 - 5t - 6 = (t-2)(t+1)(t+3)$. В (б) формы линейно не эквивалентны; хар. многочлены матриц Грама: $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-2)(t-1)^2$ и $t^3 - 7t - 6 = (t-3)(t+1)(t+2)$.

ПК5◇9. Разложите квадратичную форму $-x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$ в ортогональную прямую сумму гиперболической и анизотропной (явно укажите гиперболический базис в

[1] Здесь и далее имеется в виду ортогонал относительно поляризации заданной квадратичной формы.

[2] По отношению в стандартной евклидовой структуре в $\mathbb{R}^3$.

какой-нибудь гиперболической плоскости и анизотропный вектор в ортогонале к ней).

ответ: в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ форма имеет матрицу Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ПК5⋄10. Те же вопросы про формы:

а) $-5x_1^2 - 18x_1x_2 - 16x_1x_3 - 17x_2^2 - 30x_2x_3 - 13x_3^2$

б) $-2x_1x_2 - 8x_1x_3 - 5x_2^2 - 22x_2x_3 - 7x_3^2$

в) $-13x_1^2 + 22x_1x_2 - 28x_1x_3 - 10x_2^2 + 24x_2x_3 - 15x_3^2$

ответ: в (а) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ форма имеет матрицу Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, в (б) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} -5 & -7 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ форма имеет матрицу Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в (в) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ форма имеет матрицу Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ПК5⋄11. Найдите в $\mathbb{Q}^3$ все изотропные векторы квадратичных форм

а) $-3x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_3^2 + 10x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$

б) $-5x_1^2 - 24x_2^2 - 4x_3^2 + 22x_1x_2 - 8x_1x_3 + 18x_2x_3$

в) $-x_1^2 - 3x_2^2 - 16x_3^2 + 14x_2x_3$.

ответ: С точностью до пропорциональности изотропные векторы описываются, например, так:

$$\text{в (а)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_1t_2 \\ t_2^2 \end{pmatrix}, \quad \text{в (б)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_1t_2 \\ t_2^2 \end{pmatrix}, \quad \text{в (в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_1t_2 \\ t_2^2 \end{pmatrix},$$

где $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$ — любые, но такое описание *не единственно*.