Задачи для подготовки к контрольной № 2

ПК2◇1° (устный счёт[1]). В уме найдите матрицы, обратные к следующим матрицам 2×2:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **д)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Проверьте результат умножением на бумажке.

ПК2◇2. Найдите базис в пространстве решений системы однородных линейных уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 - 8x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 11x_5 = 0 \end{cases}$

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, параметрическое описание пространства решений: $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_5 \\ x_3 = -x_5 \\ x_4 = 2x_5 \,, \end{cases}$ базис в пространстве решений составляют строки матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в (б) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, параметрическое описание пространства решений: $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \,, \end{cases}$ базисный вектор пространства решений $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ПК2◇3. Найдите базис в ядре и образе линейного оператора $F : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, матрица которого в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^4$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -5 & -7 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & -9 & -15 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & -12 & -9 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, базис в ядре составляют строки матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, базис в образе — первый и третий столбцы исходной матрицы; в (б) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, базис в ядре составляет вектор $(1, 1, 1, 0)$, базис в образе — первый, второй и четвёртый столбцы исходной матрицы.

ПК2◇4. Линейный оператор $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе из векторов

$$v_0 = (0, 1, -2)\,, \quad v_1 = (1, -1, -1)\,, \quad v_2 = (-2, 7, -7)\,.$$

Напишите матрицу оператора F в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^3$.

[1] Умение быстро делать эту задачу абсолютно необходимо как на контрольной № 2, так и на всех последующих контрольных.

ответ: $F_e = C_{ev}F_vC_{ev}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & -1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -14 & -9 & -5 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 & -33 & -18 \\ 145 & 83 & 42 \\ -107 & -55 & -24 \end{pmatrix}$.

ПК2⋄5. Линейный оператор $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Напишите матрицу оператора F в базисе из векторов

$$v_0 = (1, 2, -1), \quad v_1 = (1, 2, 0), \quad v_2 = (-1, -1, -1).$$

ответ: $F_v = C_{ev}^{-1}F_eC_{ev} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 13 & -3 \\ -27 & -21 & 6 \\ -20 & -19 & 10 \end{pmatrix}$.

ПК2⋄6. Выясните, обратимы ли нижеследующие матрицы, и для обратимых найдите обратные, а для необратимых — их ранги:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -12 & 10 \\ -3 & 8 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & -8 \\ 2 & -3 & -10 & -21 \end{pmatrix}$.

ответ: в (а) $\begin{pmatrix} 64 & 31 & -4 & 6 \\ 18 & 9 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ в (б) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -6 & -2 \\ -2 & -3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ в (в) матрица не обратима ранга 3.

ПК2⋄7. Обозначим через $U, W \subset \mathbb{Q}^4$ наименьшие по включению аффинные подпространства, проходящие, соответственно,

а) через точки $(-4, -4, 6, 1)$, $(-4, -5, 9, 0)$, $(-8, -1, 21, -4)$, $(-10, -1, 33, -8)$ и через точки $(4, -15, -14, -3)$, $(-13, 25, -23, 21)$, $(-11, 17, -13, 13)$, $(-9, 9, -3, 5)$.

б) через точки $(-4, -5, 3, -3)$, $(0, 7, -5, -4)$, $(-7, -14, 9, 0)$, $(-10, -23, 15, 0)$ и через точки $(-7, -14, 11, 6)$, $(-14, -35, 28, 20)$, $(-9, -20, 17, 14)$, $(-1, 4, -5, -11)$.

Найдите $\dim U$, $\dim W$ и $\dim U \cap W$ или докажите, что $U \cap W = \varnothing$.

ответ: в (а) две непересекающиеся двумерные плоскости, в (б) две двумерные плоскости, пересекающиеся по прямой, проходящей через точку $(-3, -2, 1, -3)$ параллельно вектору $(2, 6, -4, -1)$.

ПК2⋄8. Решите в поле $\mathbb{Q}$ системы уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 9x_4 - 4x_5 - 13x_6 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 24x_4 - 8x_5 - 26x_6 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 12x_4 + 4x_5 + 14x_6 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 9x_4 + 2x_5 + 7x_6 = 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 7x_6 = 4 \\ -3x_1 - 6x_2 + 21x_3 + 7x_4 + 9x_5 - 32x_6 = -16 \\ 3x_1 + 6x_2 - 21x_3 - 3x_4 + 3x_5 - 12x_6 = 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + 19x_3 + 6x_4 + 14x_5 - 47x_6 = -25 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 14x_6 = -1 \end{cases}$

и укажите базисный репер в каждом аффинном пространстве решений.

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид расширенной матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ параметрическое описание пространства решений: $\begin{cases} x_1 = -3x_3 + 3x_4 - x_6 + 3 \\ x_2 = 2x_3 + 3x_4 + x_6 - 2 \\ x_5 = -3x_6 - 1\,, \end{cases}$ аффинное пространство решений проходит через точку $(3, -2, 0, 0, -1, 0)$, а базис его направляющего векторного пространства составляют строки матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; в (б) приведённый ступенчатый вид расширенной матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ параметрическое описание пространства решений: $\begin{cases} x_1 = 3x_3 - x_6 - 2 \\ x_2 = 2x_3 + 2x_6 + 3 \\ x_4 = 2x_6 + 2 \\ x_5 = 3x_6 - 2\,, \end{cases}$ аффинное пространство решений проходит через точку $(-2, 3, 0, 2, -2, 0)$, а базис его направляющего векторного пространства составляют строки матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.