ПРОГРАММА ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ

«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

ЗА ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР 2021/22 УЧЕБНОГО ГОДА

ТЕМА 1. Евклидова плоскость, неравенства треугольника и Коши – Буняковского – Шварца, длины векторов, ориентированный угол между векторами. Геометрическое описание поля комплексных чисел, евклидова плоскость = комплексная прямая. Тригонометрические формулы сложения аргументов и кратных углов. Группа движений евклидовой плоскости, теорема Шаля. Группа подобий евклидовой плоскости, описание подобий в терминах комплексных чисел, существование неподвижной точки.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *знать примеры конкретных проявлений неравенства Коши – Буняковского – Шварца; находить ортогональную проекцию и нормальную составляющую вектора относительно данного ненулевого вектора; находить расстояния между точками, точками и прямыми, а также углы между прямыми и площади треугольников и параллелограммов на евклидовой плоскости; свободно вычислять с комплексными числами, в частности, возводить их в любые целые степени; вычислять композиции движений плоскости, определять тип движения по классификации Шаля; отличать собственные подобия от несобственных, вычислять композиции подобий; находить неподвижные точки подобий.*

ТЕМА 2. Векторные пространства. Порождающие наборы векторов, линейная зависимость, лемма о замене, существование и свойства базисов. Размерность суммы и пересечения подпространств. Прямые суммы векторных пространств и подпространств, дополнительные подпространства. Фактор пространства, размерность фактора.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить размерности и указывать базисы в разнообразных пространствах: в линейных оболочках данных векторов, в пространствах решений ситем уравнений, в пересечениях и объединениях таких пространств; выяснять, являются ли данные векторы линейно зависимыми и/или порождающими; выяснять, является ли сумма заданных подпространств прямой, а сами подпространства — дополнительными.*

ТЕМА 3. Линейные отображения, размерность ядра и образа, непустые слои являются сдвигами ядра. Матрица линейного отображения, размерность пространства линейных отображений, произведение матриц и композиция отображений. Важный пример: полиномиальная интерполяция с кратными узлами.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *выписывать матрицу отображения в заданных базисах и понимать, как она меняется при смене базисов; находить размерность ядра и образа, а также указывать в них явные базисы; находить многочлен с предписанными струями в заданных точках.*

ТЕМА 4. Аффинные пространства, аффинизация векторного пространства и векторизация аффинного пространства. Пересечение аффинных подпространств. Аффинный репер и аффинные координаты. Центр тяжести взвешенных точек, барицентрические комбинации точек, барицентрические координаты.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить размерность аффинной оболочки заданного набора точек, а также размерность пересечения аффинных подпространств, заданных уравнениями или как аффинные оболочки наборов точек, либо доказывать, что такое пересечение пусто; находить центр тяжести и применять теорему о группировании масс; написать уравнение (соотв. неравенство), задающее в аффинных или в барицентрических координатах гиперплоскость (соотв. полупостранство) с предписанными геометрическими свойствами.*

ТЕМА 5. Аффинные отображения, дифференциал аффинного отображения. Группа аффинных преобразований, аффинное преобразование n-мерного пространства однозначно задаётся своим действием на $n + 1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости. Полуаффинные преобразования, всякое полуаффинное преобразование аффинного пространства размерности $\geqslant 2$ над полем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$ аффинно.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *описывать образы и прообразы точек, прямых и других фигур при заданных аффинных преобразованиях, а также находить неподвижные точки и инвариантные прямые аффинных преобразований; предъявлять аффинные преобразования с предписанным действием на те или иные фигуры или доказывать, что таких аффинных преобразований не существует.*

ТЕМА 6. Алгебра матриц, ассоциативность и дистрибутивность умножения матриц. Матрица перехода от одного набора векторов к другому. Обратимые матрицы, критерии обратимости. Изменение матрицы $F_{\boldsymbol{e}}$ линейного эндоморфизма $F : V \to V$ при смене базиса $\boldsymbol{e}$ в V. Обращение верхней унитреугольной матрицы. Ранг матрицы: размерность линейной оболочки строк равна размерности линейной оболочки столбцов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *свободно перемножать матрицы; получать из данной матрицы A матрицу с предписанными строками и столбцами при помощи умножения матрицы A на подходящую матрицу с нужной стороны; применять таблицу умножения базисных матриц E_{ij} при практических вычислениях; использовать матричные обозначения для линейных выражений одних векторов через другие и свободно оперировать с матрицами перехода $C_{\boldsymbol{uw}}$; находить ранг матрицы методом Гаусса или по теореме об окаймляющих минорах; оценивать ранг произведения и суммы матриц.*

ТЕМА 7. Качественный анализ систем линейных уравнений: матричная запись, интерпретация в терминах линейных отображений, критерии разрешимости, размерность и структура аффинного пространства решений, альтернатива Фредгольма и специализации всего этого для систем, у которых число уравнений равно числу неизвестных.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *оценивать размерность пространства решений и выяснять, совместна ли система, не решая уравнений явно.*

ТЕМА 8. Метод Гаусса: преобразование матрицы к приведённому ступенчатому виду при помощи элементарных операций над строками. Использование метода Гаусса для отыскания базиса в линейной оболочке конечного множества векторов, для решения системы линейных уравнений, для анализа обратимости и отыскания обратной матрицы, для отыскания базиса в ядре и образе линейного отображения и в факторе координатного пространства по линейной оболочке заданного конечного множества векторов. Комбинаторный тип векторного подпространства в $\Bbbk^n$, единственность базиса с приведённой ступенчатой матрицей координат. Две системы линейных уравнений имеют одно и то же пространство решений если и только если их матрицы преобразуются к одинаковому приведённому ступенчатому виду.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *преобразовывать матрицу к приведённому ступенчатому виду и находить её ранг, а также обратную матрицу, если последняя существует; разделять неизвестные в системе линейных уравнений на свободные и связанные, указывать параметрическое описание всех решений, а также аффинный репер в пространстве решений; предъявлять базис в U и в $\Bbbk^n/U$ для подпространства $U \subset \Bbbk^n$, заданного системой линейных однородных уравнений или как линейная оболочка набора векторов; предъявлять базис в $\ker F$ и в $\operatorname{im} F$ для оператора $F : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$, заданного явной матрицей в явнях базисах.*

ТЕМА 9. Двойственное пространство, двойственные базисы, координаты линейной формы в двойственном базисе. Вложение $V \hookrightarrow V^{**}$ и изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ для конечномерного V. Задание подпространств системами однородных уравнений: аннуляторы, биекция $U \leftrightarrow \operatorname{Ann} U$ между подпространствами дополнительных размерностей в V и в V^* инволютивна, обращает включения и переводит суммы в пересечения, а пересечения — в суммы. Пространства, двойственные к подпространству и к фактор пространству, описание двойственного пространства к линейной оболочке заданного набора векторов, ранг матрицы. Двойственные линейные отображения, связь между их ядрами и образами.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *описывать базис, двойственный к данному; написать матрицу двойственного оператора в двойственном базисе; находить размерность, указывать базис и задавать уравнениями векторные подпространства вида $U + W$ и $U \cap W$, если известны векторы, порождающие подпространства $U, W \subset \Bbbk^n$, и/или линейные уравнения, задающие эти подпространства.*

ТЕМА 10. Объём ориентированного параллелепипеда, полилинейные кососимметричные и знакопеременные формы, пространство кососимметричных n-линейных форм на n-мерном пространстве одномерно. Чётность и длина перестановки, знак тасующей перестановки. Определитель квадратной матрицы иопределитель линейного оператора: полилинейность, инвариантность относительно транспонирования, мультипликативность. Правила Крамера для решения невырожденных систем из n неоднородных и $n-1$ однородных линейных уравнений на n неизвестных. Присоединённая матрица, тождество $A \cdot A^{\vee} = A^{\vee} \cdot A = \det(A) \cdot E$ для матриц с элементами из произвольного коммутативного кольца с единицей, явная формула для обратной матрицы. Матрицы с элементами в алгебре многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, характеристический многочлен и тождество Гамильтона – Кэли.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить знаки перестановок; вычислять определители и миноры разнообразных матриц; пользоваться правилами Крамера, формулой для обратной матрицы и формулами для разложения определителя по строкам и столбцам, в частности, быстро обращать матрицы размера* 2×2 *и* 3×3 *и решать системы из двух неоднородных (соотв. однородных) линейных уравнений на две (соотв. три) неизвестных.*

ТЕМА 11. Пространства с операторами: гомоморфизмы и изоморфизмы (подобие операторов), (не)приводимость, (не)разложимость, примеры неразложимых приводимых операторов. Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора. Спектр оператора, собственные числа и собственные подпространства, сумма собственных подпространств с разными собственными числами является прямой. Разложение пространства с оператором по разложению аннулирующего этот оператор многочлена на взаимно простые множители. Корневые подпространства и корневое разложение. Вычисление функций от матриц и операторов при помощи полиномиальной интерполяции струй функции в корнях аннулирующего оператор многочлена. Диагонализуемые операторы, критерии диагонализуемости. Общие собственные векторы коммутирующих операторов, одновременная диагонализация коммутирующих диагонализуемых операторов. Нильпотентные операторы, существование жорданова базиса, цикловой тип. Разложение Жордана, жорданова нормальная форма матрицы над алгебраически замкнутым полем.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить характеристический и минимальный многочлены, спектр, собственные и корневые подпространства данного оператора или матрицы; вычислять аналитические функции от операторов и матриц; выяснять, диагонализуем ли данный оператор; находить цикловой тип нильпотентного оператора; выяснять подобны ли два оператора в ситуации, когда их характеристические многочлены полностью разлагаются на линейные множители.*