Лекция 16 декабря (вторая половина)

Два оператора, характеристические многочлены которых полностью раскладываются на линейные множители, подобны $\Longleftrightarrow$ у них одинаковые ЖНФ с точностью до перестанов. ки блоков $J_m(\lambda) = \underbrace{\boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{matrix}}}_{m}$

$$\chi_F(t) = \det(tE - F)$$

$\mu_F(t)$ – мин. многочлен.

$$\mu_F(t) \mid \chi_F(t) \qquad \left(\mu_F(t) \mid g(t) \quad \forall g : g(F) = 0\right).$$

корни μ_F явл. корнями $\chi_F(t)$.

$\mathrm{Spec}(F)$ = корни χ_F содержатся среди корней любого многочлена, аннулирующего F

$$g(F)=0 \qquad g(F)\big|_{V_\lambda}=0,$$

$$(a_nF^n+a_{n-1}F^{n-1}+\ldots+a_1F+a_0)v$$

$$v\in V_\lambda$$

$$F^kv=\lambda^kv$$

$$\swarrow$$

$$(a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0)v$$

$v\in V_\lambda \Rightarrow v$ собств. для $f(F)$ с собств. числом $f(\lambda)$

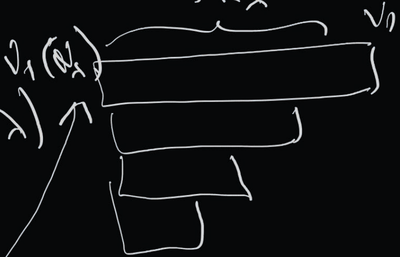
$$f(F)=0 \Rightarrow f(\lambda)=0.$$

$\mathrm{Spec}(F)\subset$ корни μ_F.

$$\Downarrow$$

μ_F и χ_F имеют одинаковый набор корней.

Если ввести ЖНФ, т.е. ввести угловой тип $\nu(N_\lambda)$ каждого оператора $N_\lambda = F - \lambda E\big|_{K_\lambda}$,



$$\mu_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)$$

размер самой большой жордановой клетки с собств. числом λ.

$$\mu_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec}(F)} (t-\lambda)^{\nu_1(N_\lambda)}$$

$\nu_1(N_\lambda)$ – длина первой строки диаграммы оператора $N_\lambda = (F-\lambda E)\big|_{K_\lambda}$

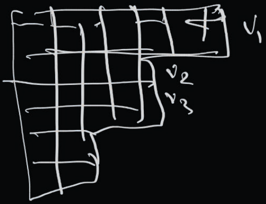
$$\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} \underline{(t-\lambda)^{m_\lambda}}$$

$m_\lambda = \dim K_\lambda$

$\leftarrow \leftarrow$

$$\boxed{N_1(N_\lambda) \le m_\lambda}$$

Зависит от λ $\longrightarrow$



$V = \oplus K_\lambda$

Базис в $\underline{K_\lambda}$

$\dim K_\lambda$.

По простым приближениям:

$$e^{\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 4 & 5\end{pmatrix}} = e^F$$

$$e^F e^F = e^{2F}$$

$$\sqrt{F}\sqrt{F} = F$$

$$e^t$$

$$\Bbbk[t] \xrightarrow{ev_F} \operatorname{End} V$$

$$\cap$$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{ev_F} \operatorname{End} V$$

Алгебра функций?

$$\mathbb{C} \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

все $f \in \mathcal{A}$ определены в окрестностях $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$

$\downarrow$

Шаг 1 Находим

$$\chi_F(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

и $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(F)$ $\forall f \in \mathcal{A}$ $\exists$ разложение:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m_\lambda - 1} f^{(k)}(\lambda) \frac{(t-\lambda)^k}{k!} + (t-\lambda)^{m_\lambda} \cdot g(t)$$

$g(t) \in \mathcal{A}$.

шаг 2 Ищем интерполяционный многочлен $p(t)$ для вычисления e^F. $\deg p < \deg \chi$.

$$p(t) = \alpha t + \beta :$$

$$p(1) = e^1 \quad \left(= e^x\big|_{x=1}\right)$$

$$p'(1) = e^1 \quad \left(= (e^x)'\big|_{x=1}\right)$$

$$\begin{cases} p(\lambda) = f(\lambda) \\ p'(\lambda) = f'(\lambda) \\ p^{(m_\lambda - 1)}(\lambda) = f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = e \\ \alpha = e \end{cases}$$

$\alpha = e \quad \beta = 0$

$$\boxed{e^F = \alpha F}$$

$$\sqrt{\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\sqrt{F} = \alpha F + \beta E$$

$\alpha t+\beta$:

$$\begin{cases} p(1)=\alpha+\beta=\sqrt{1}=1 \\ p'(1)=\alpha=\left(\sqrt{t}\right)'\Big|_{t=1}=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)\Big|_{t=1}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\alpha=\frac{1}{2}\quad\beta=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 4 & 5\end{pmatrix}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$\overset{\shortparallel}{B}$

у этого ур-я много решений

$\searrow B^2=F$?

$(-1)^2=1$

$\alpha+\beta=-1$

$\sqrt{1}=-1$

второе решение!

$F: V\to V$

$0\neq V_\lambda=\ker(F-\lambda E)\subsetneq V$

$\underline{G: V_\lambda\longrightarrow V_\lambda}$

Следствие: Пусть G – конечная группа линейных операторов $V \to V$, и пусть $\Bbbk$ – алг. замкнуто и $\operatorname{char} \Bbbk \nmid |G|$.

Тогда (1) все операторы из G диагонализуемы

(2) Они диагонализуемы одновременно $\Leftrightarrow$ G абелева.

$$F^{|G|} = E$$

$$f = t^{|G|} - 1 = 0 \qquad \operatorname{char} \Bbbk \nmid |G|$$

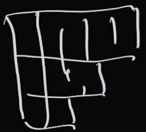
$$f' = |G| t^{|G|-1}$$

$$\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{m_\lambda}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda$$

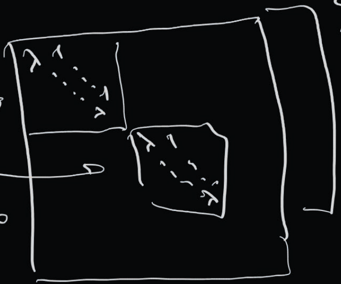
$$\dim V = \dim \chi_F(t) = \sum m_\lambda$$

$N_\lambda \leftrightarrow$



$\leftarrow \dim K_\lambda$

цикловой тип оператора



блоков с λ на диагонали столько же, сколько строк и их размеры равны длинам строк

с одним и тем же λ и всего размер $\dim K_\lambda$

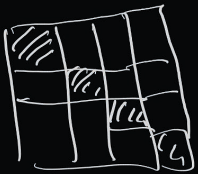
$\parallel$

A

$$\chi_A(t) = \prod (t-\lambda)^{\dim K_\lambda}$$

Другими словами:

$$V = \bigoplus K_\lambda \Rightarrow \boxed{\chi_F(t) = \prod \chi_{F|_{K_\lambda}}(t)}$$



$$\boxed{\chi_{F|_{K_\lambda}} = (t-\lambda)^{\dim K_\lambda}}$$

$$\chi_F(t) = \prod (t-\lambda)^{\dim K_\lambda}$$

$$F_i : U_i \to U_i \qquad 1 \le i \le m$$

$$\oplus F_i : \oplus U_i \longrightarrow \oplus U_i$$

$$(u_1, \dots, u_m) \longmapsto (F_1 u_1, F_2 u_2, \dots, F_m u_m)$$

матрица оператора $\oplus F_i$ в любом базисе, согласованном с разложением в прямую сумму имеет вид

$$\oplus F_i = \begin{pmatrix} F_1 & & 0 \\ & F_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\bar{V}_\lambda$ - собственное || K_λ корневое

$F : V \to \underline{\underline{V}}$ $\qquad V_\lambda = \{v \mid Fv = \lambda v\}$

$F : U \to U$ $\qquad U_\lambda = \{u \mid Fu = \lambda u\}$