Лекция 16 декабря (первая половина)

$F : V \longrightarrow V \qquad \chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{m_\lambda}$

$\underline{V = \bigoplus K_\lambda}$ корневое подпр-во $K_\lambda = \ker (F-\lambda E)^{m_\lambda}$

По-другому, $K_\lambda = \bigcup_{m \geq 1} \ker (F-\lambda E)^m$

$F-\lambda E$ действует на всех K_μ, $\mu \neq \lambda$,

как изоморфизм.

$\ker (F-\lambda E) < K_\lambda$, $K_\lambda \cap K_\mu = 0$

$\ker (F-\lambda E)\big|_{K_\mu} = 0$

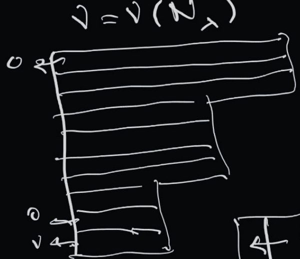
$\ker (F-\lambda E) \leq \ker (F-\lambda E)^2 \leq \dots$

она стабилизируется как минимум на показателе $m = m_\lambda$ = кратность корня λ.

$$\boxed{F = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} F\big|_{K_\lambda}} = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} \lambda E\big|_{K_\lambda} + \underbrace{(F-\lambda E)}_{N_\lambda}\big|_{K_\lambda}$$

нильпотентен

Когда наступит стабилизация, зависит от циклового типа нильпотентного оператора $N_\lambda = (F-\lambda E)\big|_{K_\lambda}$



$\dim \ker N_\lambda^k$ = сумме длин первых k столбцов

$\boxed{4}$

$\ker \underline{(F-\lambda E)}^{\nu_1} = \ker (F-\lambda E)^{\nu_1+1} = \ldots$ $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_s)$

стабилизация наступает при $m = \nu_1$.

длины строк $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_s$

$$\ker (F-\lambda E)^{\nu_1-1} \subsetneq \ker (F-\lambda E)^{\nu_1} = \ker (F-\lambda E)^{\nu_1+1}$$

Следствие 1: $F = F_d + F_n$, где

F_d – диагонализуем, F_n – нильпотентен,

$F_d F_n = F_n F_d$.

$$F_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} = \operatorname{Spec} F$$

$F_n = F - F_d \qquad F_n\big|_{K_\lambda} = (F - \lambda E)\big|_{K_\lambda} = N_\lambda$

F в циклическом для оператора F_n базисе записывается матрицей из блоков

$$\lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{\text{длина одной из строк диаграммы Юнга } \nu(N_\lambda)}$$

$0 \leftarrow e_1 \leftarrow \dots \leftarrow e_{\nu_i}$

Жорданова клетка

Такая матрица наз. жордановой нормальной формой оператора F.

Теор. Такое разложение единственно:

$F = F_n' + F_d'$: $F_n' F_d' = F_d' F_n'$, F_d' диагонализуем, F_n' нильпотентен, Тогда

$\underline{\underline{F_n' = F_n}}$, $\underline{\underline{F_d' = F_d}}$ $\qquad$ F_n, F_d — те, что выше.

Док-во: отступление про перестановочные операторы. **Напоминание:**

$FG = GF \Rightarrow G$ переводит $\ker(f(F))$ и $\operatorname{im}(f(F))$ в себя $\forall$ многочлен $f \in \Bbbk[t]$.

(следует из того, что $Gf(F) = f(F)G$)

$$\begin{tikzcd} Gf(F)v=0 \arrow[r, bend right, dash] & f(F)Gv=0 \end{tikzcd}$$

Лемма: Пусть $S \subset \operatorname{End}(V)$ — любое множество попарно коммутирующих операторов. Тогда:

(1) если все операторы диагонализуемы, то их можно диагонализировать в одном базисе.

(2) если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то у всех операторов есть общий собственный

вектор [собственное значение этого вектора зависит от оператора]

Док-во: индукция по $\dim V$.

Если все операторы скалярные (т.е. имеют вид λE) что так, если $\dim V = 1$, то любой базис годится и все векторы собственные для всех операторов.

Пусть $\exists F \in S : F \neq \lambda E$.

Тогда в (1): $V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} V_\lambda$ $\quad \dim V_\lambda < \dim V$

в (2) $\exists$ собственное подпр-во $0 \subsetneq V_\lambda \subsetneq V$ оператора F

Каждый $G \in S$ переводит все V_λ в себя. $\Rightarrow$ по индукции

в (1) все операторы можно одновременно диагонализировать на каждом V_λ.

в (2) у всех операторов есть общий

собственный вектор в V_λ.

Возврат к док-ву: F_d' перестановочен с F, он переводит каждое подпр-во $K_\lambda = \ker(F-\lambda E)^{m_\lambda}$ в себя и диагонализуем на K_λ.

⊛ Лемма: Операторы F_d и F_n, построенные выше, можно получить как многочлены от оператора F, причём без свободного члена, т.е.

$$F_d = a_1F + a_2F^2 + \ldots + a_kF^k$$

$$F_n = b_1F + b_2F^2 + \ldots + a_mF^m$$

Все собственные числа $F_d'|_{K_\lambda}$ могут быть только λ

Пусть F_d' имеет на K_λ собств. значение μ, т.е. есть вектор $v \in K_\lambda$:

$F_d' \cdot v = \mu v$, $\mu \neq \lambda$. Тогда $(F_d - F_d')v =$

$= F_d v - F_d' v = (\lambda - \mu) v$

$\Leftarrow$

v собственный для $F_d - F_d'$ с собств. значением $(\lambda - \mu) \neq 0$.

$F = F_d + F_n = F_d' + F_n' \Rightarrow (F_d - F_d') =$

$= (F_n' - F_n)$

Оператор $\underline{F_n} - \underline{F_n'}$ имеет собственный вектор с ненулевым собственным числом

Из $(*) \Longrightarrow F_n F_n' = F_n' F_n$ т.к. F_n — многочлен от F.

Сумма перестановочных нильпотентов тоже нильпотент. $a^n = 0$ $b^m = 0$

$ab = ba$

$$(a+b)^{m+n-1} = 0$$

$$a^{\alpha} b^{\beta} \quad \alpha+\beta = m+n-1$$

$(F_n' - F_n)$ нильпотентен и имеет ненулевое собственное число

Это невозможно!

$$\boxed{F_d'\big|_{K_\lambda} = \lambda E}$$

$$\Downarrow$$

$$F_d' = F_d \Rightarrow F_n' = F - F_d' = F - F_d = F_n$$

Факт (*)

F_d — это оператор:

$$F_d\big|_{K_\lambda} = \lambda E.$$

Надо найти многочлен $f(t)$:

$$(1) \quad f(F)\big|_{K_\lambda} = \lambda E$$

(2) $f(t) \in t\,\mathbb{k}[t]$ (*)

(1) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f(t) \equiv \lambda}}$ mod $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ $\forall \lambda$

т.к. все $(\lambda-\lambda)^{m_\lambda}$ попарно взаимно просты, это можно добиться

нужно, чтобы $\underline{\underline{f = tg}}$

Найдем такие $f_\lambda(t)$, чтобы

$$f_\lambda(t) \equiv \left[\begin{array}{l} 1 \mod (t-\lambda)^{m_\lambda} \\ 0 \mod (t-\mu)^{m_\mu} \end{array}\right.$$

$\forall \mu \neq \lambda$.

при $\lambda \neq 0$ многочлен t обратим mod $(t-\lambda)^{m_\lambda}$

$\Downarrow$

$\exists$ такие $g_\lambda(t)$: $\underbrace{t \cdot g_\lambda(t)} = \underbrace{f_\lambda(t)}$

при $\lambda = 0$ положим $g_\lambda(t) = 0$.

Искомый многочлен $f(t)$ — это

$$f(t) = t \sum_{\lambda \in \text{Spec.}} g_\lambda(t) \lambda$$

$$f(t) \bmod (t-\lambda)^{m_\lambda}$$

$$[f] = [t] \sum \lambda [g_\lambda] = \sum \lambda [t g_\lambda] \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{upon } \lambda = 0}}{=}$$

$$= \sum \lambda [f_\lambda]$$

$$\Rightarrow f(F) \in t\mathbb{k}[t] \Rightarrow f(F) = Fd$$

$$f(F)\big|_{K_\lambda} = \lambda E$$