Лекция 14 декабря (вторая половина)

Пример: A — алгебра всех функций, которые у которых ряд Тейлора абсолютно сходится в некоторой окрестности каждого корня λ. $\to$ $\ln t$, $\tan\sqrt{t}$ $\begin{matrix}\text{ел } \lambda_i \neq 0 \\ \text{все } \lambda_i = 0\end{matrix}$

A — алгебра всех аналитических ф-ий $\Bbbk \to \Bbbk$ (т.е. функций, раскладывающихся в каждой точке в ряд Тейлора с бесконечным радиусом сходимости) = абсолютно сходящиеся всюду в $\Bbbk$ степенные ряды e^t, $\sin t$, $\cos t$.

Теорема Если алгебра $\underline{A}$ и оператор F удовл. св-вам (1)–(5) выше, то $\exists!$ гомоморфизм алгебр

$$ev_F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{End}(V) :$$

$$\varphi(t) \longmapsto \varphi(F)$$

$\varphi(F) = a_0 E + \ldots + a_n F^n$ ∀ многочлен $\varphi \in \mathcal{A}$.

Мета идея: $\mathrm{Span}(F^n \mid n \in \mathbb{N}) =$

= конечномерное пр-во

порождённое $E, F, F^2, \ldots F^k$

$k < \dim V$

если функция φ является "пределом многочленов" $\varphi(F) \in \mathrm{Span}(E, \ldots, F^{\dim V - 1})$

$\Downarrow$

∀ разумной функции $\varphi(t)$ оператор $\varphi(F)$ — это многочлен от F степени $\leq \dim V - 1$.

Док-во теоремы

единственность: $\alpha(F)=0$ где

$$\alpha = \prod (t-\lambda)^{m_\lambda}$$

$$\Leftarrow$$

$$V = \oplus K_\lambda, \quad K_\lambda = \ker(\lambda E - F)^{m_\lambda}$$

$$f(t) = f(\lambda) + f'(\lambda)(t-\lambda) + \ldots + f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)\,\frac{(t-\lambda)^{m_\lambda-1}}{(m_\lambda-1)!} + g(t)(t-\lambda)^{m_\lambda}$$

$\downarrow$ подставим $t = F$

$$f(F) = \underbrace{f(\lambda)\cdot E + \underline{f'(\lambda)}(F-\lambda E) + \ldots + \underline{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}\cdot \frac{(F-\lambda E)^{m_\lambda-1}}{(m_\lambda-1)!}} + g(F)\cdot(F-\lambda E)^{m_\lambda}$$

$\downarrow$

$f(F)\big|_{K_\lambda}$ действует как многочлен $j_\lambda^{m_\lambda-1}(F)$

$$j_\lambda^{m_\lambda-1} = f(\lambda) + f'(\lambda)(t-\lambda) + \ldots + f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)(t-\lambda)^{m_\lambda-1}$$

$(m_\lambda-1)$-я струя функции f в точке λ (jet)

∃ многочлен $P_{F,f}(t) \in \mathbb{K}[t]$:

$$\underline{\underline{P_{F,f}(t)}} \equiv \underline{\underline{j_\lambda^{m_\lambda-1}}}(t) \mod \underline{\underline{(t-\lambda)^{m_\lambda}}}$$

сразу для всех корней λ.

и разность любых двух таких многочленов делится на $\alpha(t)$.

Такой многочлен $P_{F,f}(t)$ степени $< \deg \alpha$ единствен!

$$\underline{\underline{f(F)}} = P_{F,f}(F)$$

интерполяционный многочлен для вычисления f на F

на каждом K_λ они действуют одинаково

$P_{F,f}(t)$ решает задачу интерполяции с кратными узлами.

↓

это единственный многочлен, значения которого и значения его первых $m_\lambda - 1$ производных в каждой точке λ такие же, как у функции f.

т.е. $P_{F,f}$ решает систему линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} P_{F,f}(\lambda) = f(\lambda) \\ P'_{F,f}(\lambda) = f'(\lambda) \\ \ldots \\ P^{(m_\lambda - 1)}_{F,f}(\lambda) = f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda) \\ \text{и так для каждого} \\ \lambda \text{ — корня многочлена } \alpha, \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \text{всего } \deg \alpha \\ \text{уравнений} \\ \deg P_{F,f} < \deg \alpha \end{array}$$

$\exists!$ решение

Единственность: $\alpha(t) = \prod (t - \lambda)^{m_\lambda}$

$$\hat{j}: \mathcal{A} \longrightarrow \bigoplus_{\lambda} \frac{\Bbbk[t]}{(t-\lambda)^{m_\lambda}} \overset{\text{К.Т.О.}}{\rightleftarrows} \frac{\Bbbk[t]}{(\alpha)}$$

$f \longmapsto$ набор её струй

$$j_\lambda^{m_\lambda-1} = f(\lambda)+f'(\lambda)(t-\lambda)+\dots+f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)\frac{(t-\lambda)^{m_\lambda-1}}{(m_\lambda-1)!}$$

$$\bmod (t-\lambda)^{m_\lambda} \in \frac{\Bbbk[t]}{(t-\lambda)^{m_\lambda}}$$

Это гомоморфизм алгебр:

каждый джет $j_\lambda^k(f+g)=j_\lambda^k(f)+j_\lambda^k(g)$

формула Лейбница $j_\lambda^k(fg)=j_\lambda^k(f)\,j_\lambda^k(g)$

$$(fg)^{(s)}=\sum_{i+j=s}\frac{s!}{i!\,j!}f^{(i)}g^{(j)}$$

как в биноме Ньютона

$$(gf)''=(gf'+g'f)'=$$

$$=gf''+2g'f'+g''f$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(\lambda)\frac{(t-\lambda)^k}{k!}=$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!\,j!} f^{(i)}(\lambda)\, g^{(j)}(\lambda) \frac{1}{k!} (t-\lambda)^i (t-\lambda)^j =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(\lambda) \frac{(t-\lambda)^i}{i!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(\lambda) \frac{(t-\lambda)^j}{j!}$$

$$\bmod (t-\lambda)^n$$

Надо: убедиться!

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] & \mathbb{k}[t]/(\alpha) \arrow[r, "ev"] & \mathbb{k} \end{tikzcd}$$

$f(t) \mapsto f(F)$

$\alpha(F) = 0$

$\varphi \to \left(j_\lambda^{n_\lambda - 1} \varphi\right)_\lambda$ λ пробегает корни мн-на α

Пример: Числа Фибоначчи

$\underline{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$ $\quad a_n = ?$

$a_0 = 0 \quad a_1 = 1$

$$\boxed{?}\quad (a_{n+1}, a_{n+2}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (a_{n+2}, a_{n+3})$$

$$(a_n, a_{n+1}) = (0, 1) \cdot \underset{\uparrow\ \text{найти}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n}$$

функцию t^n на матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $at + b$ — это такой многочлен

что $\begin{cases} a\lambda_1 + b = \lambda_1^n \\ a\lambda_2 + b = \lambda_2^n \end{cases}$ λ_1, λ_2 — собств. числа матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(a_n, a_{n+1}) = (0, 1) \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_n = a}\ !$$

по правилу Крамера:

$$a = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix}$$

λ_1 и λ_2 — корни хар. мн-на

матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi = t^2 - t - 1 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\chi\overset{=F}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = 0 \qquad \chi(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$$

$$\varphi(F) = p_{\varphi,F}(F) \qquad p_{\varphi,F}(t) = at+b$$

$$\begin{cases} \varphi(\lambda_1) = a\lambda_1 + b \\ \varphi(\lambda_2) = a\lambda_2 + b \end{cases}$$

$$\chi_F(t) = \det(tE - F) =$$

$$= \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{m_\lambda}$$

$$K_\lambda = \ker(\lambda E - F)^{m_\lambda}$$

Упр: Проверить, что $K_\lambda = \bigcup \ker \underline{\underline{(\lambda E - F)}}^m$

$m \geq 1$

Указание: $(\lambda E - F)$ действует **на каждом** K_μ с $\mu \neq \lambda$ **биективно.**

$$K_\mu = \ker(\mu E - F)^{m_\mu}$$

$$(\lambda E - F)\big|_{K_\mu} : K_\mu \xrightarrow{\sim} K_\mu .$$

достаточно проверить, что

$$\ker(\lambda E - F)\big|_{K_\mu} = 0 .$$

$$\ker(\lambda E - F) \subset K_\lambda, \quad K_\lambda \cap K_\mu = 0$$

поэтому $\ker(\lambda E - F)\big|_{K_\mu} = 0$!