Лекция 9 февраля (вторая половина)

Док-во: $q(F)=0$

$$q_j(F)\,Q_j(F)=0$$

$$\forall j \quad \operatorname{im} Q_j(F) \subset \ker q_j(F)$$

Достаточно убедиться, что

(1) $\sum_j \operatorname{im} Q_j(F) = V$

(2) Сумма $\sum_j \ker q_j(F)$ прямая,

т.е. $\ker q_i(F) \cap \sum_{j\neq i} \ker q_j(F) = 0$

для всех i

$\text{НОД}(Q_1,\dots,Q_m)=1.$ док-во (1)

$\exists f_1(t),\dots,f_m(t) : \sum f_i(t)\cdot Q_i(t)=1$

подставим $t = F$ и применим к произвольному $v \in V$. Получим:

$$\sum_i Q_i(F) f_i(F) \cdot v = E v = v$$

$$\uparrow$$

$$\sum_i \operatorname{im} Q_i(F). \quad \Rightarrow V = \sum_i \operatorname{im} Q_i(F)$$

Обозначение: $U_1 + \dots + U_m := \sum U_i$

сумма подпр-в (не обязательно прямая).

Док-во того, что

$$\underbrace{\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0.}_{}$$

НОД$(q_i, Q_i) = 1 \Rightarrow \exists\, g(t), h(t) \in \mathbb{k}[t]$

$$\boxed{g(t) q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t) = 1}$$

подставим $t = F$ и применим обе части к произвольному вектору

$$v \in \underline{\ker q_i(F)} \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F)$$

$$v = Ev = g(F)\cdot \underbrace{q_i(F)\cdot v}_{0} + h(F)\cdot \underbrace{Q_i(F)\cdot v}_{0} = 0$$

$$Q_i(F) = q_1(F)\dots q_{i-1}(F)\,q_{i+1}(F)\dots q_m(F)$$

$$v = \sum w_j \qquad \underbrace{w_j \in \ker q_j(F),}$$

$$Q_i(F)\cdot w_j = 0$$

$$\|$$

$$q_1(F)\dots q_{i-1}(F)\,q_{i+1}(F)\dots q_m(F)\cdot w_j$$

$$\| \qquad w_j \in \ker q_j(F)$$

$$q_1(F)\dots q_m(F)\,q_j(F)\,w_j = 0.$$

Примеры: F наз. проектором, если $F^2 = F$. $f(t) = t^2 - t = t(t-1)$ аннулирует F.

$\underline{\ker F} = \operatorname{im}(E-F)$

$\ker(E-F) = \underline{\operatorname{im} F}$

$\boxed{\forall v \in \operatorname{im} F \quad v = Fv}$

$\{v \mid Fv = v\}$

F проектирует

V на im F

вдоль ker F

$V = \operatorname{im} F \oplus \ker F$

Пример: F наз. инволюцией, если

$F^2 = E$ ⇔ F аннулируется

многочленом $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$

если char $k \neq 2$

$\ker(F+E) = \operatorname{im}(F-E)$

$\ker(F-E) = \operatorname{im}(F+E)$

$V = V_+ \oplus V_-$ где $V_+ = \{v \mid Fv = v\} \overset{\shortparallel}{=} \ker(F-E)$

$$v = \underset{\substack{\cap \\ V_+}}{\frac{v+Fv}{2}} + \underset{\substack{\cap \\ V_-}}{\frac{v-Fv}{2}}$$

$V_- = \{v \mid Fv = -v\} \overset{\shortparallel}{=} \ker(F+E)$

Очень важный пример: корневое

разложение.

Пусть $\chi_F(t) = \det(tE - F) = \prod\limits_{\lambda} \underline{(t-\lambda)}^{m_\lambda}$

$\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \mathrm{Spec}\,F$ — множество всех различных корней $\chi_F(t)$ (обозначение $\mathrm{Spec}\,F$, спектр оператора F)

$q_\lambda = (t-\lambda)^{m_\lambda}$ — попарно взаимно просты

$\Downarrow$

$$V = \bigoplus K_\lambda,$$ где $K_\lambda = \ker(\lambda E - F)^{m_\lambda}$ корневое подпр-во оператора F.

Простейшие примеры операторов:

Нильпотентные операторы:

$F: V \to V$ нильпотентный, если $F^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

F аннулируется многочленом t^n. $f^n \vdots \mu_F(F) \Rightarrow$

$\mu_F(F) = t^k, \ k \leq \dim V$

без ограничения общности можно считать, что $F^k = 0$, где $k \leq \dim V$.

Пример: умножение на $[t]$ в $\frac{\Bbbk[t]}{(t^n)}$.

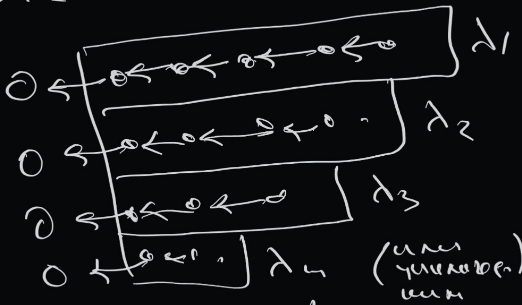
Теорема: Любой **нильпотентный** оператор подобен оператору умножения на $[t]$ в прямой сумме $\frac{\Bbbk[t]}{(t^{\lambda_1})} \oplus \ldots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(t^{\lambda_s})}$

и два таких оператора подобны $\Longleftrightarrow$ они отличаются перестановкой слага.

ствах.

Иначе говоря: если $F: V \to V$ нильпотентен, то в V есть базис, векторы которого можно разместить в клетках диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m)$

так, что F действует по правилу:



Такой базис называется **жордановым**, а диаграмма λ наз. **цикловым типом** нильпотентного оператора F.

Док-во: индукция по $\dim V$:

Если $F=0$ (это так, когда $\dim V = 1$) то любой базис **жорданов**.

Пусть $F \neq 0$. Тогда $\underset{\substack{\nparallel\\ 0}}{\ker F} \subsetneq V$

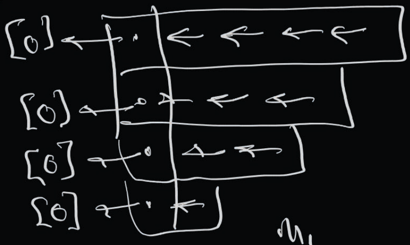
Применим индуктивное предположение к пр-ву $W = V/(\ker F)$ $\dim W < \dim V$

и оператору $\boxed{\begin{aligned} \bar F : W &\to W \\ [v] &\mapsto [Fv] \end{aligned}}$

правильно корректно, т.к. $v \mapsto v+u$
где $u \in \ker F$

$$F(v+u) = F(v) + \underset{0}{\cancel{F(u)}} = F(v)$$

По индукции в W есть циклический базис



$Fu_1, \dots Fu_k \in \ker F$.

$u_1 \vdots u_k$ — левые крайние.

линейно независимы,

$$\lambda_1 Fu_1 + \dots + \lambda_k Fu_k = 0 \Rightarrow \overset{=0}{F(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k)}$$

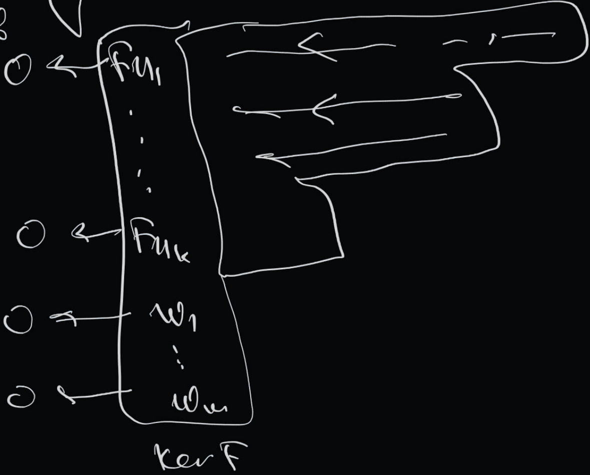
$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k \in \ker F$

$\lambda_1 [u_1] + \ldots + \lambda_k [u_k] = [0]$ в W

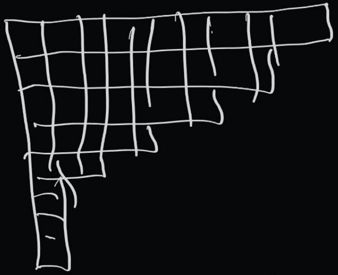
что возможно только если все $\lambda_i = 0$

т.к. $[u_1] \ldots [u_k]$ — это часть базиса в W,

Дополним $Fu_1, \ldots, Fu_k$ до базиса в $\ker F$. Мы получим искомый базис в V



Цикловой тип не зависит от выбора циклического базиса.



Сумма длин первых k столбцов – это $\dim \ker F^k$

Длина k-го столбца диаграммы – это $\dim \ker F^k - \dim \ker F^{k-1}$

однозначно определяется оператором F.

Сл: Два нильпотентных оператора над произвольным полем подобны $\Leftrightarrow$ одинаковый цикловой тип.