Лекция 30 ноября (вторая половина)

Правило Крамера

$V = \Bbbk^n$ $\qquad v_1, \dots, v_n \in \Bbbk^n$

$\det(v_1, \dots, v_n)$ – определитель матрицы координат векторов $v_1, \dots, v_n$ (не важно, как пишутся координаты — по строкам или по столбцам).

Теорема: Набор векторов $v_1, \dots, v_n \in \Bbbk^n$ образует базис в $\Bbbk^n \iff \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ и в этом случае коэфф-ты разложения любого $w \in \Bbbk^n$ по этому базису находятся по правилу Крамера:

если $w = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n$, то

$$x_i = \frac{\det(v_1 \dots \overset{i}{w} \dots v_n)}{\det(v_1, \dots, v_n)} \leftarrow \text{заменили } v_i \text{ на } w$$

Док-во: $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис

$v_1, \dots v_n$ – базис $\Leftrightarrow$ C_{ev} – обратима.

Обратимость матрицы $\Leftrightarrow$ $\det C_{ev} \neq 0$

$C_{ev} C_{ve} = E$ $\quad$ $\det C_{ev} \det C_{ve} = 1$

если C обратима, то $\det C$ обратим

$\det C \cdot \det C^{-1} = 1$

если C не обратима, то столбцы линейно зависимы $\Rightarrow$ $\det C = 0$

$v_1 x_1 + \dots + v_n x_n = w$

$\downarrow$ применяю линейную функцию

$u \mapsto \det(v_1, \dots v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots v_n)$

$x_i \det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \dots v_n) =$

$= \det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)$

Пример Пусть точки $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}^n$ не лежат в одной $(n-2)$-мерной плоскости.

Тогда через них проходит единственная гиперплоскость (= афф. подпр-во коразмерности 1) Как задать его уравнением?

$P_1, \ldots, P_n$ не лежат в $(n-2)$-мерной плоскости

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_n}}_{n-1 \text{ штук}} \text{ линейно независимы}$$

$$x \in P_1 + \mathrm{Span}(\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_n}) \ ?$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{P_1x} \in \mathrm{Span}(\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_n})$$

$$\Updownarrow$$

$$\det(\overrightarrow{P_1x}, \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_n}) = 0$$

$$\boxed{\text{линейное уравнение на } x}$$

$$\overrightarrow{P_1x} = x - P_1$$

$$\downarrow$$

$$\det(x, \overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_n}) =$$

$$= \det(p_1, \overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_n})$$

Совсем пример: написать уравнение плоскости $p + tu + sv$ $\quad t, s \in \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$. $\quad p, u, v \in \mathbb{R}^3$ даны.

Ответ:

$$\det(x, u, v) = \det(p, u, v)$$

Пусть матрица $C = (c_{ij})$ обратима. Как написать явную формулу для C^{-1}?

$$(v_1, \ldots v_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$$

$$(v_1, \ldots v_n) \cdot C^{-1} = (e_1, \ldots, e_n)$$

в j-том столбце C^{-1} стоят координаты вектора $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots 0)$ в базисе $(v_1, \ldots, v_n)$

В позиции (ij) матрицы C^{-1} стоит i-тая координата вектора e_j в базисе $v_1,\dots,v_n$. Она равна

$$\frac{\det(v_1\dots v_{i-1}\, e_j\, v_{i+1}\dots v_n)}{\det(v_1,\dots,v_n)}$$

$= \det C$

$$\det\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & i & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c|c} C_{ij} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & C_{ij} \\ \hline & 1 & \\ \hline C_{ij} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & C_{ij} \end{array}\right) & \begin{matrix}\\ \\ j\\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} =$$

$j-1$ перестановок строк
$i-1$ перестановок столбцов

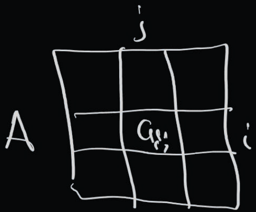
$$= (-1)^{j-1+i-1}\det\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & C_{\hat j\hat i} \end{array}\right)$$

матрица размера $(n-1)(n-1)$ полученная из матрицы C вычеркиванием

$= (-1)^{i+j} \det C_{\hat{j}\hat{i}}$ j-той строки и i-того столбца.

Ответ: матрица C обратима $\Longleftrightarrow$ $\det C \neq 0$ и в этом случае элемент (ij) в матрице C^{-1} равен

$$\frac{(-1)^{i+j} \det C_{\hat{j}\hat{i}}}{\det C}$$



$\rightsquigarrow (-1)^{i+j} \det A_{\hat{i}\hat{j}}$

алгебраическое дополнение к

элементу a_{ij}

Обозначение: $(-1)^{i+j} A_{ij}$ или $(-1)^{i+j} \hat{a}_{ij}$

$A_{ij} = \hat{a}_{ij} =$

= определитель матрицы, которая получается из A вычёркиванием креста с центром в a_{ij}

Алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} — это $(-1)^{i+j} A_{ij}$

Матрица, транспонированная к матрице из алгебраических дополнений, называется присоединённой к A (adjunct matrix) и обозначается $A^{\vee}$

$$\check{A} = (\check{a}_{ij})$$

и имеет $\check{a}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ji}$

определитель
матрицы
полученной
из A
вычеркиванием
креста
с центром $\underline{ji}$

индексы переставились!

Факт: $A^{-1} \exists \iff \det A \neq 0$

и в этом случае

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \check{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\check{A} A} = A \check{A} = \underline{\det A \cdot E}$$

это буквальное тождество верно

для любой матрицы

$$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}[a_{ij}])$$

n^2 переменных a_{ij}

Упр. Докажите,
вдохновляясь док-вом
мультипликативности определителя
