Лекция 16 ноября

Результат приведения матрицы A к приведённому ступенчатому виду A_{red} не зависит от способа приведения, а зависит только от линейной оболочки строк матрицы A в $\Bbbk^n$ $(A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\Bbbk))$

Подпр-во $U < \Bbbk^n$ имеет нулевое пересечение $\underbrace{U \cap E_I = 0}$

$E_I = \mathrm{Span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}})$, где

$r = \dim U$

$$\Downarrow$$

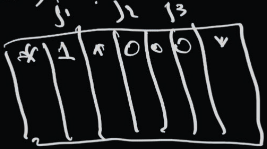
В U $\exists!$ базис, матрица координат которого (записанных по строкам) имеет $r \times r$ подматрицу E в столбцах с номерами $\underline{j_1, \dots, j_r}$, дополнительными к $I = (i_1, \dots, i_{n-r})$.

В U $\exists!$ базис из векторов

вида $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{стандартные базисные векторы из } E_J}}{u_\nu = e_{j_\nu}} + \underset{\in E_I}{w_\nu}$ $\nu = 1, \dots, r$

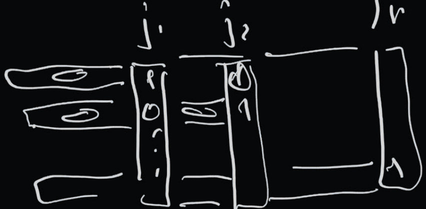
Этот базис является прообразом стандартного базиса $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$ в E_J при изоморфизме $\pi_J|_U : U \xrightarrow{\sim} E_J$

ограничение проекции $\underline{\pi_J : \mathbb{k}^n \to E_J}$ вдоль E_I, т.е. $\pi_J : (x_1 \dots x_n) \mapsto (x_{j_1}, \dots, x_{j_r})$



Метод Гаусса строит в U = линейной оболочке строк матрицы A в $\mathbb{k}^n$ и канонический базис в лексикографически минимальным J

$\{1, \dots, n\}$



Ещё один характеризация:

$V_{>k} = \mathrm{span}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ – $(n-k)$ мерное координатное подпр-во $k = 0, 1, \dots, n$

$$V_{>0} := V \supset V_{>1} \supset V_{>2} \supset \dots \supset V_{>(n-1)} \supset V_{>n} = 0$$

$W_k = V / V_{>k}$ – k мерное пр-во

базис в нём образуют классы $[e_1], \dots, [e_k]$

$V \twoheadrightarrow W_k$ $\quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_k)$ в базисе $[e_1] \dots [e_k]$

забываем последние $n-k$ координат

$$\begin{tikzcd}
0 = W_0 & \overset{1}{W_1} \arrow[l, two heads] & \overset{2}{W_2} \arrow[l, two heads] & \cdots \arrow[l, two heads] & \overset{n-1}{W_{n-1}} \arrow[l, two heads] & W_n = V \arrow[l, two heads] \\
V/V_{>0} \arrow[u, equal] & V/V_{>1} \arrow[u, equal] & V/V_{>2} & & V/V_{>n-1} & V/0 \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

$$W_k / \Bbbk \cdot [e_k] = W_{k-1} \twoheadleftarrow W_k$$

$[e_1] \dots [e_{k-1}]$ $\qquad$ $[e_1] \dots [e_k]$

факторизация по 1-мерному подпр. ву, натянутому на $[e_k]$

Как V сидит в этой башне?

$d_k = \dim \pi_k(U)$

$\pi_k : V \longrightarrow W_k$ забывание последних $n-k$ координат

$d_0 = 0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n = r$

нестрого возрастающая $\dim U$

$d_k - d_{k-1} \leq 1$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} U & \subset & V \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \pi_n(U) & & W_n \end{array}}$$

$\pi_n(U) = U$

$$\begin{tikzcd}
\pi_{k-1}(U) \arrow[d, phantom, "\cap"] & \pi_k(U) \arrow[l, two heads] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
\underline{\underline{W_{k-1}}} & \underline{\underline{W_k}} \arrow[l, two heads]
\end{tikzcd}$$

факторизация по $\underline{\underline{[e_k]}}$

лексикограф. порядок

$$\begin{array}{ccc} w_1 & \dots & w_r \\ & \wedge & \\ u_1 & \dots & u_r \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} j_1 & j_2 & \dots & j_k & w_{k+1} \\ \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel & \wedge \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k & u_{k+1} \end{array}$$

$U \longrightarrow d_0 = 0 \leq d_1 \leq d_2 \dots \leq d_n = r$

$d_k - d_{k-1} \leq 1$

Пусть $k_1, \dots, k_r$ – это такие номера k, для которых $d_k - d_{k-1} = 1$

Теорема: Следующие последовательности из r возрастающих натуральных чисел совпадают:

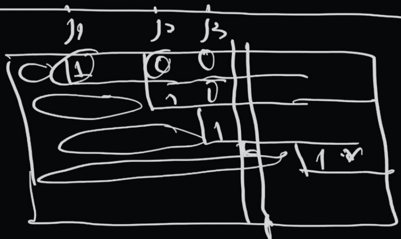
(1) номера $k_1, \dots, k_r$, где происходит подскок $d_k - d_{k-1} = 1$ в последовательности размерностей $d_k = \dim \pi_k(U)$

(2) номера $j_1, \dots, j_r$ базисных столбцов матрицы A_{red}, полученной методом Гаусса из матрицы координат любого набора векторов, порождающих U

(3) лексикографически минимальный набор $J = \{j_1^{min}, j_2^{min}, \dots, j_r^{min}\}$: $U \cap E_I = 0$, где $I = \{1, \dots, n\} \setminus J$.

---

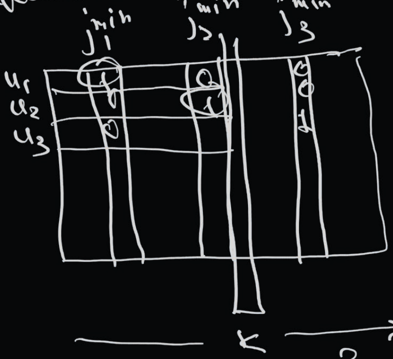
(1)=(2)



$\pi_k(u_\nu)$ у которых $\overset{k'}{j}_\nu \le k$ образуют базис в $\pi_k(U)$, а векторы u_{j_ν} с $\nu > k$ лежат в ядре проекции $\pi_k : V \to W_k$

(отсюда уже следует независимость приведённой ступенчатой матрицы от способа приведения).

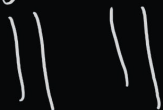
(2) = (3)



Векторы

$\pi_k(u_\nu)$ с $j_\nu \le k$ линейно независимы в $\pi_k(U)$ — в столбцах

$j_1^{min}, \dots, j_\nu^{min}$ ← последний $y \le k$



← стоит единичная подматрица размера $\nu \times \nu$

При каждом k количество $\hat{j}_v^{min} \le k$ не превосходит $d_k = \dim(\pi_k(U))$. $\Rightarrow$ не превосходит количества $\hat{j}_v \le k$

! $\boxed{\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_r}$
$\boxed{\hat{j}_1^{min}, \dots, \hat{j}_r^{min}}$

$\forall k \quad \# \hat{j}_v \le k$
$\geq$
$\# \hat{j}_v^{min} \le k$

Это значит что $\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_r$ лексикографически не больше, чем $\hat{j}_1^{min}, \dots, \hat{j}_r^{min}$

Двойственность

$$X \xrightarrow{f} \Bbbk$$

множество точек

функции $X \to \Bbbk$

$\Bbbk^X$

$\Bbbk^X$ – функции из X в $\Bbbk$.

между X и $\mathbb{k}^X$ есть каноническая симметрия

$p \in X$ — это функция $\mathbb{k}^X \longrightarrow \mathbb{k}$

evaluation $ev_p : f \longmapsto f(p)$

вычисление

точки ⇝ функции

$$ev : p \longmapsto ev_p \qquad X \longrightarrow \mathbb{k}^{(\mathbb{k}^X)}$$

множество функций на $\mathbb{k}^X$

$$X \longleftrightarrow \mathcal{O}_X \subset \mathbb{k}^X \qquad \boxed{\mathbb{k}}$$

со структурой

"регулярные" функции

‖

функции, уважающие структуру на X

числа

$[0,1]$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ev}\colon X &\longrightarrow \Bbbk^{\mathcal{O}_X} \\
p &\longmapsto \left[\begin{aligned} \mathrm{ev}_p : \mathcal{O}_X &\longrightarrow \Bbbk \\ f &\longmapsto f(p) \end{aligned}\right]
\end{aligned}
$$

Верно ли, что X – это то же самое, что регулярные функции на $\mathcal{O}_X$?

Пример: $X = [0,1]$

регулярные = непрерывные

алгебра $C^0 = \{ [0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \mid f \text{ непр} \}$

$$
p \in [0,1] \qquad \begin{aligned} \mathrm{ev}_p : C^0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(p). \end{aligned}
$$

Задача по анализу! Верно ли, что соответствие $p \longmapsto \mathrm{ev}_p$ задаёт биекцию между $[0,1]$ и гомоморфизмами $\mathbb{R}$-алгебр $C^0 \to \mathbb{R}$, $1 \longmapsto 1$?

ОТВЕТ: ΔA!

гомоморфизм $\Bbbk$ алгебр $A \to B$ это $\Bbbk$-линейное отображение, перестановочное со сложением и умножением

V – векторное пр-во над $\Bbbk$

V^* – это линейные функции $V \to \Bbbk$

V^* наз. двойственным пр-вом к V.

$\varphi : V \to \Bbbk$ линейные функционалы, ковекторы

Пример: $V = \Bbbk^n$ – пр-во координатных столбцов.

$\varphi: V \to \Bbbk$ матрица φ в стандартном базисе $e_1, \dots, e_n$ пр-ва $\Bbbk^n$ — это строка значений $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

$\cap$

пр-во строк $\leftarrow (\Bbbk^n)^*$

матрица φ_a $\searrow$

$(a_1, \dots, a_n) \in (\Bbbk^n)^*$ — любой предписанный набор значений

$\downarrow$

"Γ_A" $\varphi_a: e_i \mapsto a_i$

$v = e_1x_1 + \dots + e_nx_n$

$= ex$

линейная функция $V \to \Bbbk$ с матрицей $(a_1 \dots a_n)$

$\varphi_a \in V^*$

$\underline{ev_v(\varphi)}$ свёртка $\langle \varphi, v \rangle$

$$\underline{\varphi(v)} = \underline{a_1x_1 + \dots + a_nx_n} = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = ax$$

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n$

абсолютно симметрично по a и x

$$ev: V \to (V^*)^*$$

$$v \mapsto ev_v : \varphi \mapsto \varphi(v)$$

изоморфизм векторных пр-в

Свёртки вектора и ковектора:

$$\langle \varphi, v \rangle := \varphi(v) = ev_v(\varphi)$$

более симм. запись.

V – любое векторное пр-во

$V^* = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = \{$линейные $\varphi : V \to \Bbbk\}$

двойственное пр-во.

Факт 1: Имеется каноническое линейное вложение $V \xhookrightarrow{ev} V^{**} = (V^*)^*$

$$ev : w \longmapsto ev_w : V^* \to \Bbbk, \quad \varphi \longmapsto \varphi(v)$$

$ev_w : V^* \to \Bbbk$ линейный функционал на V^*

сопоставление $w \longmapsto ev_w$

$$V \longrightarrow V^{**} = (V^*)^*$$

тоже линейно ev_w линейно зависит от w: для линейных φ число $\varphi(w)$ линейно зависит от w.

Инъективность: $V \hookrightarrow V^{**}$

$\Updownarrow$

$$\begin{array}{l} w \longmapsto ev_w \neq 0 \\ \rotatebox{90}{$\neq$} \\ 0 \end{array}$$

$\operatorname{Ker} ev = 0$

$\forall$ ненулевого $w \in V$ $\exists$ линейный функционал $\varphi : V \to \Bbbk$: $\varphi(w) \neq 0$

включим w в базис $e_1 = w, e_2, \ldots, e_n$ и возьмём в качестве φ функционал первой координаты: $v = \sum e_i x_i \longmapsto x_1$