$$(a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+\dots+a_nb_n$$

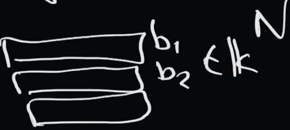
В j-том столбце произведения AB стоит линейная комбинация столбцов матрицы A с коэфф-тами из j-го столбца матрицы B

$a_1,\dots,a_n$ – столбцы A

$\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ – j-тый столбец B.

$$(a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\sum a_ib_i$$

i-тая строка матрицы AB является линейной комбинацией строк матрицы B с коэфф-тами из i-той строки матрицы A



i-тая строка $\longrightarrow (a_1,\dots a_i)$

$b_2=(b_{21}, b_{22},\dots,\dots)$

$$X = \begin{pmatrix} \longleftarrow x_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow x_2 \longrightarrow \\ \longleftarrow x_3 \longrightarrow \end{pmatrix}$$

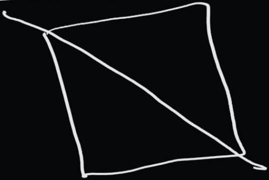
На что и с какой? стороны надо умножить X, чтобы получилась матрица из строк

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \longleftarrow 2x_2 - x_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow x_3 + x_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow x_2 \longrightarrow \\ \longleftarrow x_3 \longrightarrow \end{pmatrix}$$

Упражнение: $(AB)^t = B^t A^t$!

$X \to X^t$ транспонирование

отражение в главной диагонали



$x^t_{ij} = x_{ji}$

строки матрицы X^t — это столбцы матрицы X

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

и наоборот

главная диагональ $i=j$

Матрица Грама: $(e_1, \dots, e_m) = e$

$(u_1, \dots, u_k) = u$

в евклидовом пр-ве.

$$(e_i \cdot u_j)$$

$$=$$

$$G_{eu} = ((e_i, u_j))$$

$$\begin{pmatrix} e_1u_1 & e_1u_2 & e_1u_3 & \dots & e_1u_k \\ - & - & - & - & \\ e_mu_1 & e_mu_2 & \dots & \dots & e_mu_k \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \cdot u = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \cdot (u_1, \dots, u_k).$$

Матрицы перехода

Пусть векторы $u_1, \dots, u_k$ линейно выражаются через векторы $w_1, \dots, w_m$

$$\begin{cases} u_1 = w_1 \cdot c_{11} + w_2 \cdot c_{21} + \ldots + w_m \cdot c_{m1} \\ u_2 = w_1 \cdot c_{12} + w_2 \cdot c_{22} + \ldots + w_m c_{m2} \\ \ldots\ldots \\ u_n = w_1 \cdot c_{1n} + w_2 \cdot c_{2n} + \ldots + w_m c_{mn} \end{cases}$$

$$(u_1, \ldots, u_n) = (w_1, \ldots, w_m) \cdot C_{wu}$$

$C_{wu} = (c_{ij})$ имеет в j-том столбце коэфф-ты разложения вектора u_j по векторам $w_1, \ldots, w_m$

$$u = w \cdot C_{wu}$$

$$\boxed{C_{uw} = C_{uv} C_{vw}}$$

Проверить дома !

C_{wu} (по столбцам стоят коэфф-ты разложения векторов u по векторам $w_1, \ldots, w_m$)

наз. матрицей перехода от векторов u к векторам w

$$\sigma = \sum u_i \cdot x_i = u \cdot x = (u_1, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

если знаем C_{wu} можем выразить σ через $w_1, \ldots, w_m$

$$\boxed{\begin{aligned} v = ux = (w C_{wu})x = w \cdot y, \text{ где} \\ y = C_{wu} \cdot x \end{aligned}}$$

умножение матриц ассоциативно.

умн: $A \times B \xrightarrow{\mu_{AB}} H$ $\quad$ $H \times C \xrightarrow{\mu_{HC}} Z$

умн: $B \times C \xrightarrow[\mu_{BC}]{} G$ $\quad$ $A \times G \xrightarrow[\mu_{AG}]{} Z$

$$\begin{tikzcd}
A \times B \times C \arrow[r, "1 \times \mu_{BC}"] \arrow[d, "\mu_{AB} \times 1"] & A \times G \arrow[d, "\mu_{AG}"'] & (*) \\
H \times C \arrow[r, "\mu_{HC}"] & Z &
\end{tikzcd}$$

$V \times \Bbbk \to \Bbbk$

$V \times V \to \Bbbk$

если умножение ассоциативно (т.е. диаграмма (*) коммутативна) то умножение матриц тоже ассоциативно

$$(A \cdot (B \cdot C))_{ij} = \sum_k a_{ik} (B \cdot C)_{kj} =$$

$$= \sum_{kl} a_{ik} (b_{kl} c_{lj}) =$$

$$= \sum_{kl} (a_{ik} b_{kl}) \cdot c_{lj} =$$

$$= \sum (AB)_{il} \cdot c_{lj} =$$

Ассоциативность (сочетательный закон)

ℓ

$= ((AB)\cdot C)_{ij}$

$(a+b)c = ac+bc$ Дистрибутивность (распределительный закон)

$\Downarrow$

для матриц тоже верно, что

$(A+B)\cdot C = AC+BC$

Проверить!

$(A+B)_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$

$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk) := \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$

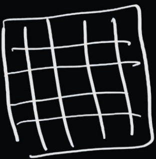
ассоциативная алгебра над полем $\Bbbk$

$\|$

векторное пр-во A умножением $A\times A\to A$ которое билинейно и ассоциативно.

A наз. ассоц. $\Bbbk$-алгеброй

$\mathrm{Mat}_n \simeq \Bbbk^{n^2}$



$$\mathrm{Mat}_{m\times n} \simeq \Bbbk^{mn}$$

Следствие: $\dim \mathrm{Hom}(V,W)^{\xleftarrow{\simeq}\,\mathrm{Mat}_{\dim W\times\dim V}} = \dim V \cdot \dim W$

если выбраны базисы $e_1,\dots,e_n$ в V и $g_1,\dots,g_m$ в W, то возникает стандартный базис E_{ij} в $\mathrm{Hom}(V,W)$ отвечающий стандартному базису в пр-ве матриц

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & j \end{array} \\ i & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$E_{ij} : \begin{cases} e_j \mapsto g_i \\ \text{все остальные — в нуль} \end{cases}$$

Задание на дом: В $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ составить таблицу умножения

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = ?$$

Выбор базиса

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & W \\ \Bbbk^n \arrow[u, "\varphi_V"'] \arrow[r, "\varphi_W^{-1}\circ F\circ \varphi_V"'] & \Bbbk^m \arrow[u, "\varphi_W"'] \end{tikzcd}$$

выбор базиса

$$\mathrm{Mat}_{m\times n} = \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk^m)$$

$$A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m : x \to Ax$$

↑ это та самая матрица, которую имеет оператор F в выбранных базисах.

$$Fe = g\cdot F_{ge}$$

$v = e\cdot x$ $\quad F(v) = F(e\cdot x) = F(e)\cdot x =$

$$= gF_{ge}\cdot x = gy$$

$$\boxed{y = F_{ge}x}$$

Оператор с матрицей F_{ge} переводит вектор с координатами x в базисе e в вектор с координатами $F_{ge}x$ в базисе g.

$\boxed{!!!}$