Линейные операторы

Терминология. С каждым линейным оператором $F : V \to V$ на конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ связаны *характеристический многочлен* $\chi_F(t) = \det(t \cdot \mathrm{Id}_V - F) \in \Bbbk[t]$, а также аннулирующий F многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, который обозначается $\mu_F(t) \in \Bbbk[t]$ и называется *минимальным многочленом* оператора F. Корни характеристического многочлена называются *собственными числами*[1] оператора F. Множество собственных чисел оператора F называется его *спектром* и обозначается $\operatorname{Spec} F$. Для каждого $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ подпространство $V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\lambda \mathrm{Id}_V - F) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$ называется *собственным подпространством* оператора F, а подпространство $K_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{m \geqslant 1} \ker(\lambda \mathrm{Id}_V - F)^m$ — *корневым подпространством* оператора F с собственным числом λ. Векторы $v \in V_\lambda$ называются *собственными векторами* с собственным значением λ. Оператор F называется *диагонализуемым*, если в V имеется базис из собственных векторов оператора F. Подпространство $U \subset V$ называется *F-инвариантным*, если $F(U) \subset U$.

ГС9◇1. Найдите собственные числа, собственные подпространства[2] и выясните, диагонализуем ли линейный оператор $F : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$, имеющий в стандартном базисе матрицу

а) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -18 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -2 & 16 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & -5 \\ 2 & 20 & -12 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -14 & -5 & -10 \\ 14 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 12 & -21 & -8 & 0 \\ 10 & -19 & -8 & 0 \\ -12 & 24 & 11 & 0 \\ -10 & 30 & 20 & -1 \end{pmatrix}$ **е)** $\begin{pmatrix} -8 & -12 & -1 & 1 \\ 7 & 11 & 1 & -1 \\ -14 & -24 & -3 & 2 \\ -3 & -9 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ **ж)** $\begin{pmatrix} 13 & -8 & -2 & 2 \\ 33 & -20 & -5 & 4 \\ -18 & 10 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 13 & 4 \end{pmatrix}$

ГС9◇2. Найдите размерности корневых подпространств и минимальный многочлен линейного оператора $F : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$, имеющего в стандартном базисе матрицу

а) $\begin{pmatrix} -9 & -5 & -11 & 6 \\ 27 & 14 & 27 & -14 \\ -25 & -12 & -22 & 11 \\ -37 & -18 & -35 & 18 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -11 & -5 & 0 & -2 \\ 40 & 17 & 2 & 4 \\ -24 & -8 & -5 & 4 \\ -28 & -10 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 1 \\ -21 & -10 & -12 & -3 \\ -17 & -5 & 3 & 1 \\ -29 & -11 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

ГС9◇3. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами найдите собственные числа и собственные подпространства линейных операторов

а) $f(x) \mapsto f(ax+b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$ — заданные числа **б)** $f(x) \mapsto xf'(x)$ **в)** $f(x) \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

ГС9◇4. Найдите характеристический многочлен оператора умножения на класс $[x]_f$ в фактор кольце $\Bbbk[x]/(f)$, где $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ — заданный многочлен.

ГС9◇5. Опишите все инвариантные подпространства и минимальный многочлен диагонализуемого оператора.

ГС9◇6. Найдите степень минимального многочлена оператора ранга 1.

ГС9◇7. Пусть оператор F аннулируется многочленом $f(t) \in \Bbbk[t]$. Покажите, что **а)** все собственные числа F являются корнями f **б)** f делится в $\Bbbk[t]$ на μ_F.

ГС9◇8. Пусть подпространство $U \subset V$ инвариантно относительно оператора $F : V \to V$. Докажите, что **а)** характеристический многочлен ограничения $F|_U : U \to U$ делит характеристический многочлен оператора F **б)** если F диагонализуем, то и $F|_U$ диагонализуем.

ГС9◇9. Существует ли оператор F с характеристическим и минимальным многочленами
а) $\chi(t) = (t^6 - 1)$, $\mu(t) = (t^3 - 1)$ **б)** $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$
в) $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$? Если да, то приведите пример.

---

[1] Или *собственными значениями*.

[2] Т. е. укажите в каждом собственном подпространстве некоторый базис.