Определители

ГС8⋄1. Вычислите **а)** $\det\begin{pmatrix}0&-4&-1\\-4&4&0\\-5&1&0\end{pmatrix}$ **б)** $\det\begin{pmatrix}-1&3&-4\\0&-3&2\\0&-4&-1\end{pmatrix}$ **в)** $\det\begin{pmatrix}1&4&-1\\0&-2&-1\\3&-1&-3\end{pmatrix}$

г) $\det\begin{pmatrix}-3&-3&1\\4&3&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ **д)** $\det\begin{pmatrix}4&2&0&0\\-1&2&-4&0\\3&0&1&2\\-2&-2&0&1\end{pmatrix}$ **е)** $\det\begin{pmatrix}-1&0&-2&3\\-3&-4&-3&2\\0&-4&-2&1\\4&3&0&3\end{pmatrix}$ **ж)** $\det\begin{pmatrix}4&2&-4&0\\-3&0&-1&0\\-4&1&2&-1\\-3&2&2&-1\end{pmatrix}$

ГС8⋄2. Найдите **а)** $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&0\\-2&2&0\end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix}0&1&-3\\-2&0&-4\\4&2&-1\end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix}-2&4&3\\-3&0&4\\2&1&-3\end{pmatrix}^{-1}$ **г)** $\begin{pmatrix}2&4&2\\-2&-3&-2\\2&-3&3\end{pmatrix}^{-1}$

д) $\begin{pmatrix}-1&-3&-1&0\\0&-4&-2&0\\-4&1&-2&1\\0&-2&2&0\end{pmatrix}^{-1}$ **е)** $\begin{pmatrix}4&0&3&0\\2&2&2&3\\0&-4&1&-4\\0&0&3&2\end{pmatrix}^{-1}$ **ж)** $\begin{pmatrix}4&-3&-3&-3\\-2&0&-2&3\\0&3&-4&-1\\4&-4&-4&-2\end{pmatrix}^{-1}$

ГС8⋄3. При помощи правила Крамера решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=8\\2x_1+5x_2-4x_3=20\\x_1+x_2+2x_3=3\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3=5\\-3x_1-9x_2-8x_3=-17\\-x_1-2x_2-3x_3=-2\end{cases}$ **в)** $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3=5\\-3x_1-9x_2-8x_3=-17\\-x_1-2x_2-3x_3=-2\end{cases}$

г) $\begin{cases}x_1-2x_2-5x_3=0\\2x_1-3x_2-9x_3=0\end{cases}$ **д)** $\begin{cases}x_1-x_2+x_3+2x_4=0\\-2x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\3x_1-2x_2+3x_3+8x_4=0\end{cases}$ **е)** $\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+3x_4=0\\x_1+2x_2+5x_3+5x_4=0\\-x_1+2x_2+4x_3+5x_4=0\,.\end{cases}$

ГС8⋄4. Вычислите $\det\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}$, где $A\in\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, $C\in\mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$, $B\in\mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$.

ГС8⋄5. Найдите **а)** $\mathrm{sgn}(n,\,(n-1),\,\dots\,,\,2,\,1)$ **б)** $\det\begin{pmatrix}0&&1\\&\iddots&\\1&&0\end{pmatrix}$ **в)** $\mathrm{sgn}(i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{n-k})$, где оба набора индексов $i_1,\dots,i_k$ и $j_1,\dots,j_{n-k}$ строго возрастают.

ГС8⋄6. Даны два набора чисел $a_1\dots,a_n$ и $b_1,\dots,b_n$ из поля $\Bbbk$. Вычислите
а) $\det\left(\alpha_i\beta_j\right)$ **б)** $\det\big(\cos(\alpha_i-\beta_j)\big)$

ГС8⋄7. Вычислите определитель матрицы с нулями на главной диагонали и единицами в остальных местах.

ГС8⋄8. Найдите **а)** $\det\begin{pmatrix}x&y&z&1\\y&z&x&1\\z&x&y&1\\\frac{x+z}{2}&\frac{x+y}{2}&\frac{y+z}{2}&1\end{pmatrix}$ **б)** $\det\begin{pmatrix}x&y&0&\cdots&0\\0&x&y&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&x&y\\y&0&\cdots&0&x\end{pmatrix}$ **в)** $\det\begin{pmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\1&0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}$.

ГС8⋄9 (определитель Вандермонда). Вычислите $\det\left(x_i^{j-1}\right)\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$.

ГС8⋄10. Покажите, что числа Фиббоначчи суть определители тридиагональных матриц с единицами по главной диагонали и над ней и минус единицами под ней.

ГС8⋄11. Вычислите **а)** $\frac{\partial\det(A)}{\partial a_{ij}}$ **б)** $\frac{\partial^2\det(A)}{\partial a_{ij}\partial a_{k\ell}}$.

ГС8⋄12. Докажите, что дополнительные миноры обратных друг другу матриц A и $B=A^{-1}$ связаны соотношением $a_{IJ}=(-1)^{|I|+|J|}b_{\overline{J}\overline{I}}$.