Метод Гаусса

Терминология. Матрица называется *приведённой ступенчатой*, если в каждой её строке самый левый ненулевой элемент равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке и является единственным ненулевым элементом своего столбца. Столбцы, где стоят эти единицы, принято называть *базисными*. У каждого векторного подпространства $U \subset \Bbbk^n$ есть единственный базис из векторов, координаты которых, записанные по строкам, образуют приведённую ступенчатую матрицу.

ГС6◇1. Найдите размерность (над $\mathbb{Q}$) и приведённый ступенчатый базис линейной оболочки строк матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -9 \\ -3 & -3 & -8 & 21 & -4 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & 16 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & -20 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & -11 & 9 \\ -2 & -1 & 6 & 14 & -6 \end{pmatrix}$

ГС6◇2. Укажите базис над $\mathbb{Q}$ в пространстве решений системы уравнений

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 8x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 10x_4 - 15x_5 + 27x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 15x_4 - 33x_5 + 40x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 8x_6 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 9x_5 + 12x_6 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 - 9x_3 + 10x_4 - 29x_5 - 39x_6 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 - 9x_3 + 11x_4 - 31x_5 - 42x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 9x_3 - 7x_4 + 23x_5 + 30x_6 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 9x_6 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 5x_4 - 4x_5 - 10x_6 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 27x_6 = 0 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 10x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 11x_5 - 9x_6 = 0 \end{cases}$

ГС6◇3. Для каждой из шести пар различных подпространств $U, W \subset \mathbb{Q}^6$ из предыдущей задачи найдите $\dim(U+W)$, $\dim(U \cap W)$ и укажите какие-нибудь базисы в $U+W$ и $U \cap W$.

ГС6◇4. Ответьте на те же вопросы про пары различных подпространств $U, W \subset \mathbb{Q}^5$ из задачи ГС6◇1, выберите все такие пары U, W, что $\mathbb{Q}^5 = U \oplus W$, и для каждой из них разложите вектор $v = (1,1,1,1,1)$ в сумму $u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$.

ГС6◇5. Напишите систему из минимально возможного числа линейных уравнений, пространство решений которой совпадает с линейной оболочкой векторов

а) $(1,2,-1,-3)$, $(-3,-6,3,10)$, $(2,4,-2,-7)$, $(1,2,-1,-1)$, $(2,5,-1,-9)$ в $\mathbb{Q}^4$

б) $(1,-1,-3,0,3)$, $(-2,2,6,0,-6)$, $(2,-1,-4,-2,4)$, $(-3,4,11,-2,-10)$ в $\mathbb{Q}^5$

в) $(1,-1,-2,-7,0,-3)$, $(-2,2,5,17,-1,5)$, $(-1,1,1,4,1,4)$, $(-2,2,6,20,-2,5)$ в $\mathbb{Q}^6$.

ГС6◇6. Решите в поле $\mathbb{Q}$ систему уравнений

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 11x_3 + 3x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 - x_4 = -6 \\ -x_1 + 3x_2 + 11x_3 - x_5 = -7 \\ 2x_1 - 5x_2 - 19x_3 - x_4 + 2x_5 = 11 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 6x_5 = -3 \\ -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 18x_4 + 12x_5 = 8 \\ -2x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 13x_4 + 17x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 15x_5 = 7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 10x_5 = -5 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 20x_5 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 14x_5 = 7 \\ -3x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 28x_5 = 13 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 8x_5 = -7 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 23 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 19 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 31 \end{cases}$

ГС6⋄7. В аффинном пространстве $\mathbb{Q}^4$ рассмотрим следующие аффинные подпространства:

а) аффинную оболочку[1] точек $(2,-3,0,-2)$, $(3,-4,-2,-1)$, $(2,-3,1,-3)$, $(3,-4,-5,2)$, $(0,-1,8,-8)$

б) $p+U$, где $p=(1,-2,3,-4)$, а направляющее векторное пространство U порождается векторами $(1,1,-3,1)$, $(-3,-3,9,-2)$, $(1,1,-3,2)$, $(-1,-1,4,-5)$, $(3,3,-12,3)$

в) $p+U$, где $p=(4,-3,2,1)$, а U задаётся уравнениями

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+x_4=0 \\ 3x_1-3x_2+9x_3+3x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+6x_3+3x_4=0 \\ x_1-x_2+3x_3+4x_4=0 \end{cases}$$

г) множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3-2x_4=10 \\ 3x_1+10x_2-14x_3-3x_4=36 \\ -2x_1-8x_2+12x_3-2x_4=-32 \\ -x_1-2x_2+2x_3+5x_4=-4 \\ 5x_1+18x_2-26x_3=69 \end{cases}$$

Найдите их размерности и укажите какой-нибудь аффинный репер в каждом из них. Для каждой из шести пар различных аффинных подпространств K, L, которые можно из них составить, выясните, пусто или нет пересечение $K\cap L$, и если не пусто, укажите в нём какой-нибудь аффинный репер.

ГС6⋄8. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ точки $a=(1,-2,3)$, $b=(-3,1,-2)$, $c=(2,-3,1)$, $d=(7,-5,1)$. Сколько прямых проходит через начало координат и пересекает обе прямые (ab) и (cd)? В каком отношении делит начало координат отрезок с концами в точках пересечения?

ГС6⋄9. Прямая в $\mathbb{Q}^4$ проходит через точку $a=(-3,3,-1,5)$ и пересекает пространство решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 4x_1-4x_2-16x_3-14x_4=-30 \\ -2x_1+2x_2-5x_3+2x_4=-3 \\ x_1-x_2+6x_3-8x_4=-2 \\ 3x_1-3x_2+11x_3-9x_4=2 \end{cases}$$

в точке b, а аффинную оболочку точек $(4,-3,1,-2)$, $(1,6,4,1)$, $(5,-6,1,0)$, $(0,9,7,8)$ — в точке c. Найдите $\overrightarrow{ab}:\overrightarrow{ac}$.

ГС6⋄10. Обратите идущие ниже матрицы методом Гаусса и проверьте ответ умножением

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & -10 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & 13 \\ -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -9 & -20 \\ -5 & 16 & -44 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -9 & -2 \\ 1 & 0 & -13 & -2 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 1 & 20 \\ 2 & 0 & -9 & -18 \end{pmatrix}$ **е)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -3 & 10 & -11 & 1 \\ 4 & -16 & 20 & 5 \\ -3 & 6 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ **ж)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -5 & 4 \\ -3 & -4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$.

[1] Т. е. пересечение всех аффинных подпространств, содержащих указанные точки.