

Проективная геометрия

- ГЛ11♦1.** Подмножество $\Phi \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{k})$ таково, что в каждой аффинной карте, с которой оно пересекается, его видно как k -мерное аффинное подпространство. Верно ли, что $\Phi = \mathbb{P}(W)$ для некоторого $(k+1)$ -мерного векторного подпространства $W \subset \mathbb{k}^{n+1}$ а) если поле $\mathbb{k} \neq \mathbb{F}_2$ б*) если $\mathbb{k} = \mathbb{F}_2$? Всегда ли есть аффинная карта, где Φ вообще не видно?
- ГЛ11♦2.** Найдите порядки групп $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, где \mathbb{F}_q — поле из q элементов.
- ГЛ11♦3 (теорема Паппа).** Пусть на \mathbb{P}_2 точки a_1, b_1, c_1 коллинеарны и точки a_2, b_2, c_2 коллинеарны. Докажите, что три точки пересечений прямых $(a_1b_2) \cap (a_2b_1)$, $(b_1c_2) \cap (b_2c_1)$, $(c_1a_2) \cap (c_2a_1)$ тоже коллинеарны.
- ГЛ11♦4.** Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к теореме Паппа.
- ГЛ11♦5.** На доске указаны две точки. При помощи линейки, которая короче расстояния между ними, проведите через эти точки прямую.
- ГЛ11♦6.** На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB .
- ГЛ11♦7 (первая теорема Дезарга).** Покажите, что три точки пересечения пар соответственных¹ сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на \mathbb{P}_2 коллинеарны если и только если три прямые, проходящие через пары соответственных вершин, пересекаются в одной точке².
- ГЛ11♦8 (вторая теорема Дезарга).** Три различные точки $p, q, r \in \mathbb{P}_2$ лежат на прямой ℓ , а три различные точки a, b, c — вне неё. Докажите, что инволюция $\sigma: \ell \simeq \ell$, переводящая точки p, q, r в точки пересечения прямой ℓ с прямыми (bc) , (ca) , (ab) , существует если и только если прямые (ap) , (bq) , (cr) пересекаются в одной точке.
- ГЛ11♦9.** Треугольники $\Delta a_1b_1c_1$ и $\Delta a_2b_2c_2$ на \mathbb{P}_2 вписаны в одну и ту же гладкую конику. Перспективен ли треугольник со сторонами (a_1a_2) , (b_1b_2) , (c_1c_2) треугольнику с вершинами $(a_1b_1) \cap (a_2b_2)$, $(b_1c_1) \cap (b_2c_2)$, $(c_1a_1) \cap (c_2a_2)$?
- ГЛ11♦10.** Покажите, что два треугольника на \mathbb{P}_2 перспективны если и только если они полярны друг другу относительно некоторой гладкой коники.
- ГЛ11♦11* (нормальные рациональные кривые).** Пусть $\mathrm{char} \mathbb{k} = 0$. Зафиксируем линейно независимые однородные многочлены n -й степени $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{k}[x_0, x_1]$ и попарно различные точки $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_1$. Покажите, что образы трёх отображений $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_n$, посылающих точку $a = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$ соответственно в точки с однородными координатами а) $(f_0(a) : \dots : f_n(a))$ б) $(\det^{-1}(p_0, a) : \dots : \det^{-1}(p_n, a))$, где $\det(b, a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0$ для $b = (\beta_0 : \beta_1)$, в) $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$, где $a_i \in \mathbb{k}$ суть коэффициенты многочлена $(\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1)^n$, переводятся друг в друга проективными преобразованиями $\mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$.
- ГЛ11♦12*.** Фиксируем $n+3$ точки $p_1, p_2, \dots, p_n, a, b, c \in \mathbb{P}_n$ так, чтобы никакие $n+1$ из них не лежали в одной гиперплоскости. Обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящих через все точки p_ν с $\nu \neq i$, а через $\psi_{ij}: \ell_j \simeq \ell_i$ — гомографию, переводящую три проходящие через точки a, b, c гиперплоскости из пучка ℓ_j в аналогичные три гиперплоскости из пучка ℓ_i . Покажите что $\bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \dots \cap \psi_{n1}(H)$ это нормальная рациональная кривая. Если общий случай труден, рассмотрите $n = 2, 3$.
- ГЛ11♦13*.** Покажите, что через каждые $n+3$ точки в \mathbb{P}_n , никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, можно провести единственную нормальную рациональную кривую. Если общий случай труден, рассмотрите $n = 2, 3$.

¹Т. е. поименованных одинаковыми буквами.

²Треугольники, обладающие этими свойствами, называются *перспективными*.