Грассмановы многочлены и определители

ГЛ5◇1. Две строки матрицы 3×3-матрицы заполнены целыми числами так, что нод чисел в каждой из них равен единице и строки не пропорциональны над $\mathbb{Q}$. Всегда ли возможно заполнить целыми числами третью строку так, чтобы определитель оказался единичным?

ГЛ5◇2. Двое по очереди заполняют целыми числами клетки матрицы 3×3. Первый выигрывает, если в результате получится вырожденная матрица. Кто победит?

ГЛ5◇3. Сколько $n \times n$ матриц определителя 1 имеется над полем из q элементов?

ГЛ5◇4. Числа $1, 2, 3, \dots, n^2$ всеми возможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n \times n$. Найдите сумму определителей этих матриц.

ГЛ5◇5 (теорема об окаймляющих минорах). Докажите, что $\operatorname{rk} A = m$ если и только если в A есть такая невырожденная $m \times m$ подматрица, что все содержащие её $(m+1) \times (m+1)$ подматрицы вырождены.

ГЛ5◇6*. Вычислите $\det\left(x^{j-i-1 \pmod n}\right)$, где $1 \leqslant j, j \leqslant n$.

ГЛ5◇7. Вычислите все частные производные $\dfrac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \partial a_{i_2 j_2} \dots \partial a_{i_k j_k}}$.

ГЛ5◇8* (матричная теорема о деревьях). Вершины связного графа Γ без петель[1] и кратных рёбер[2] занумерованы числами от 1 до n. Матрица $A = (a_{ij})$ имеет диагональные элементы a_{ii}, равные взятому со знаком минус количеству рёбер, сходящихся в i-той вершине, а остальные элементы a_{ij} равны единице, если вершины i и j соединены ребром, и нулю — если не соединены. Докажите, что:

а) $\det A = 0$

б) все алгебраические дополнения A_{ii} к элементам главной диагонали отличны от нуля и равны между собой

в) Γ дерево если и только если все $A_{ii} = 1$.

ГЛ5◇9. Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров

а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **б)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.

ГЛ5◇10*. Докажите, что для любых двух матриц $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ в $\Bbbk[x, y]$ выполнено равенство $\det(xA + yB) = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \operatorname{tr}\left(\mathcal{A}_k \mathcal{B}_k^{\vee}\right)$, где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k^{\vee}$ суть матрицы размера $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$, клетки которых нумеруются k-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ и которые имеют в позиции IJ, соответственно, минор a_{IJ} матрицы A и алгебраическое дополнение $(-1)^{|J|+|I|} b_{\hat{J}\hat{I}}$ к JI-тому минору матрицы B.

ГЛ5◇11. Для данной матрицы $A \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ обозначим через $L_A, R_A, \operatorname{Ad}_A : \operatorname{Mat}_n(\Bbbk) \to \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ линейные операторы, переводящие матрицу $X \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$, соответственно, в матрицы

а) $L_A(X) = A \cdot X$ **б)** $R_A(X) = X \cdot A$ **в*)** $\operatorname{Ad}_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}$.

Вычислите следы и определители этих операторов.

ГЛ5◇12*. Для заданной матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{n \times n}$ обозначим через $S^2 A$ линейный оператор на пространстве однородных многочленов второй степени от n переменных, переводящий многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ в многочлен $f(y_1, \dots, y_n)$, где $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A$. Найдите его след и определитель.

[1] Т. е. рёбер, ведущих из вершины в неё саму.

[2] Т. е. любые две вершины графа соединяются не более, чем одним ребром.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 (11.11.2020)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
9а			
б			
10			
11а			
б			
в			
12			