Линейные отображения и матрицы

ГЛ4◇1. На клетчатой бумаге нарисован по линиям сетки прямоугольник и во все внешние клетки, имеющие общую точку с его контуром, записаны числа. Всегда ли возможно написать в каждую клетку прямоугольника по числу так, чтобы любое из них равнялось среднему арифметическому чисел из четырёх клеток, имеющих общую сторону с рассматриваемой? Если да, то много ли способов это сделать?

ГЛ4◇2. Вершины куба надписаны числами $b_1, b_2, \dots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё шесть чисел на грани так, чтобы число в каждой из вершин оказалось равно сумме чисел на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Найдите все наборы $b_1, b_2, \dots, b_8$, для которых задача имеет решение, и для каждого из них найдите все решения задачи.

ГЛ4◇3. Имеется 7 одинаковых банок, каждая из которых на $9/10$ заполнена краской одного из семи цветов радуги, в разных банках — разные цвета. Можно ли, переливая краску из банки в банку и равномерно размешивая содержимое после каждого переливания, получить хотя бы в одной из банок колер, где все семь цветов представлены в равной пропорции?

ГЛ4◇4. Докажите, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

ГЛ4◇5. Обозначим через $U_1, U_2 \subset \Bbbk^n$ и $W_1, W_2 \subset \Bbbk^m$ линейные оболочки строк и столбцов матриц $A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$. Какие импликации имеются между условиями
а) $\mathrm{rk}(A_1 + A_2) = \mathrm{rk}(A_1) + \mathrm{rk}(A_2)$ **б)** $U_1 \cap U_2 = 0$ **в)** $W_1 \cap W_2 = 0$?

ГЛ4◇6 (неравенство Фробениуса). Для любых трёх линейных операторов $A, B, C : V \to V$ докажите соотношения
а) $\dim \mathrm{im}\, A = \dim \mathrm{im}(BA) + \dim(\mathrm{im}\, A \cap \ker B)$
б) $\dim \mathrm{im}(BA) + \dim \mathrm{im}(AC) \leqslant \dim \mathrm{im}\, A + \dim \mathrm{im}(BAC)$

ГЛ4◇7 (проекторы). Пусть нетождественный линейный оператор $F : V \to V$ имеет $F^2 = F$. Покажите, что $V = \ker F \oplus \mathrm{im}\, F$ и F проектирует V на $\mathrm{im}\, F$ вдоль $\ker F$.

ГЛ4◇8 (инволюции). Пусть нетождественный линейный оператор $F : V \to V$ имеет $F^2 = E$. Покажите, что $V = V_+ \oplus V_-$, где $V_\pm = \{v \in V \mid F(v) = \pm v\}$.

ГЛ4◇9. Покажите, что каждая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ удовлетворяет квадратному уравнению вида $A^2 + \alpha A + \beta E = 0$ с подходящими $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, и решите в $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ уравнения
а) $X^3 = 0$ **б)** $X^2 = -E$.

ГЛ4◇10 (нильпотентные матрицы). Ненулевая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что сумма нильпотентных матриц A и B нильпотентна **а)** всегда **б)** если $[A, B] = 0$ **в*)** если $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$?

ГЛ4◇11. Верно ли, что каждая квадратная матрица, перестановочная с заданной диагональной матрицей A, все диагональные элементы которой попарно различны, имеет вид $f(A)$ для некоторого многочлена $f(x) \in \Bbbk[x]$?

ГЛ4◇12*. Пусть $n \times n$-матрицы A, B, C, D обратимы. Явно вычислите $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$ в предположении, что матрицы $A - BD^{-1}C$, $C - DB^{-1}A$, $B - AC^{-1}D$, $D - CA^{-1}B$ тоже обратимы.

ГЛ4◇13*. Найдите все такие матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, что для всех $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ с $\mathrm{tr}\, X = 0$ выполняется равенство $\mathrm{tr}(AX) = 0$.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (23.10.2020)

№	**дата**	**кто принял**	**подпись**
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9а			
б			
10а			
б			
в			
11			
12			
13			