

§21. Конформная геометрия вещественных коник

21.1. Комплексная проективизация вещественной плоскости. Всюду в этом параграфе мы рассматриваем координатную плоскость $V = \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек комплексной координатной плоскости $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, вложенной в качестве стандартной аффинной карты $U_0 = e_0 + V_{\mathbb{C}}$ в проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Бесконечно удалённую прямую $x_0 = 0$ карты U_0 мы называем *бесконечностью* и обозначаем $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$. Точками этой прямой являются ненулевые векторы пространства $V_{\mathbb{C}}$, рассматриваемые с точностью до умножения на ненулевые комплексные константы. Мы будем называть их *комплексными направлениями* в карте U_0 , поскольку выпущенная из произвольной точки $p \in U_0$ вдоль вектора $v \in V_{\mathbb{C}}$ комплексная аффинная прямая $\{p + tv \mid t \in \mathbb{C}\}$ представляет собою видимую в карте U_0 часть проективной прямой $(pv) \subset \mathbb{P}_2$, соединяющей точку p с бесконечно удалённой точкой $v \in \ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}_2$.

На комплексной проективной плоскости \mathbb{P}_2 имеется комплексно полулинейная¹ инволюция *комплексного сопряжения* $\sigma : (x_0 : x_1 : x_2) \leftrightarrow (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$. Она переводит прямые в прямые, а коники — в коники и сохраняет стандартную аффинную карту $U_0 \subset \mathbb{P}_2$, действуя на ней комплексно полуаффинным² вещественно аффинным преобразованием. Точки, прямые и коники, переводящиеся комплексным сопряжением в себя, называются *вещественными*. Например, бесконечно удалённая прямая $x_0 = 0$ и коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ вещественны. Обратите внимание, что у вещественной фигуры может не быть ни одной вещественной точки.

Поскольку линейное уравнение, задающее прямую, и квадратичное уравнение, задающее гладкую конику, однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число определяются этими геометрическими фигурами, вещественность прямой или коники означает, что каждый коэффициент a её уравнения удовлетворяют соотношению $\bar{a} = \lambda a$ с одним и тем же для всех коэффициентов a ненулевым множителем $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $|\bar{a}| = |a|$, мы заключаем, что $|\lambda| = 1$. Полагая $\lambda = \vartheta^2$, видим, что $\bar{\vartheta}a = \vartheta^{-1}\bar{a} = \vartheta a \in \mathbb{R}$. Таким образом, вещественность прямой или коники на \mathbb{P}_2 равносильна тому, что в стандартных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ эти фигуры можно задать уравнениями с вещественными коэффициентами.

21.1.1. Конформная структура. Евклидово скалярное произведение на $V = \mathbb{R}^2$, рассматриваемое с точностью до умножения на ненулевую вещественную константу, называется *конформной структурой* на вещественной плоскости V . Конформная структура не позволяет сказать, что такое длина вектора, но даёт возможность определить угол $\vartheta = \sphericalangle(u, w) \in [0, \pi/2]$ между вещественными прямыми с направляющими векторами $u, w \in V$ по формуле

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|(u, w)|}{\sqrt{(u, u)(w, w)}}, \quad (21-1)$$

правая часть которой не меняется ни при замене скалярного произведения на пропорциональное, ни при умножении векторов на ненулевые вещественные константы. Геометрически, это наименьший из двух смежных углов между вещественными прямыми, параллельными векторам u и w .

С токи зрения комплексной проективной плоскости \mathbb{P}_2 конформная структура представляет собою гладкую вещественную квадрику $I = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid (v, v) = 0\}$ на бесконечно удалённой

¹Т. е. $\sigma(u + w) = \sigma(u) + \sigma(w)$ для всех $u, w \in \mathbb{C}^3$, но $\sigma(zv) = \bar{z}\sigma(v)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $v \in \mathbb{C}^3$, ср. с ?? на стр. ??.

²См. п° 2.1 на стр. 24.

прямой $\ell_\infty = \mathbb{P}(V_\mathbb{C})$, где $(*, *) : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ означает продолжение евклидова скалярного произведения на V до комплексной билинейной формы на $V_\mathbb{C}$.

УПРАЖНЕНИЕ 21.1. Убедитесь, что такое продолжение существует и единственно.

Поскольку евклидово скалярное произведение анизотропно над \mathbb{R} , квадрика I не имеет вещественных точек и состоит из двух различных комплексно сопряжённых точек. Мы будем называть квадрику I *абсолютом* конформной структуры. Всюду далее мы предполагаем, что конформная структура такова, что стандартный базис в \mathbb{R}^2 является для неё ортогональным. В этом случае абсолютом I задаётся в стандартных однородных координатах $(x_1 : x_2)$ на $\ell_\infty = \mathbb{P}(V_\mathbb{C})$ уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 0$ и состоит из двух точек

$$\iota_+ = (i : 1) = (1 : -i) \quad \text{и} \quad \iota_- = (-i : 1) = (1 : i), \quad (21-2)$$

которые мы будем называть *абсолютными направлениями*.

21.1.2. Евклидова перпендикулярность. Сопоставление направлению v евклидово перпендикулярного направления v^\perp задаёт на прямой ℓ_∞ инволютивную гомографию с неподвижными точками ι_\pm , которая называется *перпендикулярностью*. В частности, равенство $(u, w) = 0$ в $V_\mathbb{C}$ равносильно гармоничности направлений $u, w \in \ell_\infty$ абсолютным направлениям (21-2).

ПРИМЕР 21.1 (УГОЛ КАК ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ)

Любые два отличных от ι_\pm направления $u, w \in \ell_\infty$ однозначно записываются в виде $u = \iota_+ + \lambda\iota_-$, $w = \iota_+ + \mu\iota_-$ с ненулевыми $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Так как $(\iota_+, \iota_+) = (\iota_-, \iota_-) = 0$, а $(\iota_+, \iota_-) = (\iota_-, \iota_+) = 2$, из форм. (21-1) на стр. 262 вытекает, что угол $\vartheta = \angle(u, w)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{\lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{\lambda/\mu} + \sqrt{\mu/\lambda}}{2}.$$

Так как $\mu/\lambda = [u, w, \iota_+, \iota_-]$ по упр. 18.6 на стр. 231, и для вещественных $u, w \in \mathbb{R}^2$

$$\overline{[u, w, \iota_+, \iota_-]} = [\bar{u}, \bar{w}, \bar{\iota}_+, \bar{\iota}_-] = [u, w, \iota_-, \iota_+] = [u, w, \iota_+, \iota_-]^{-1},$$

мы заключаем, что для вещественных направлений u, w двойное отношение $[u, w, \iota_+, \iota_-]$ лежит на единичной окружности в \mathbb{C} и равно $[u, w, \iota_+, \iota_-] = \mu/\lambda = e^{2i\vartheta}$. Таким образом, евклидов угол $\vartheta \in [0, \pi/2]$ между вещественными направлениями $u, w \in \ell_\infty$ равен половине абсолютной величины аргумента их двойного отношения с абсолютными направлениями:

$$\vartheta = \frac{1}{2} |\text{Arg}[u, w, \iota_+, \iota_-]| = \frac{1}{2} |i \ln[u, w, \iota_+, \iota_-]|.$$

21.2. Гладкие непустые вещественные коники. Гладкая непустая вещественная коника называется *параболой*, если она касается прямой ℓ_∞ , и называется *гиперболой* или *эллипсом*, если она пересекает прямую ℓ_∞ по двум различным, соответственно, вещественным или комплексно сопряжённым друг другу точкам. Точки пересечения $\{a', a''\}$ коники с бесконечностью называются *асимптотическими направлениями* этой коники. Таким образом, парабола имеет ровно одно, автоматически вещественное асимптотическое направление, которое также называют *направлением оси параболы*. Это же направление является полюсом прямой ℓ_∞ относительно параболы, см. рис. 21♦1. Гипербола имеет два различных вещественных асимптотических направления, а эллипс — два различных комплексно сопряжённых друг другу асимптотических направления, см. рис. 21♦2.

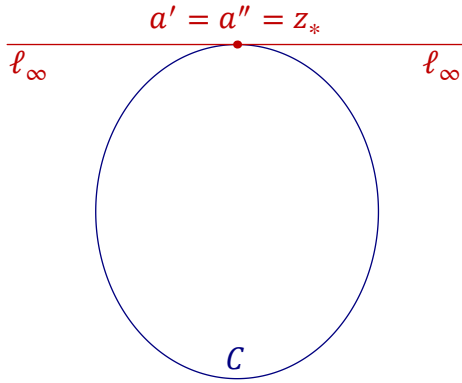


Рис. 21◊1. Парабола.

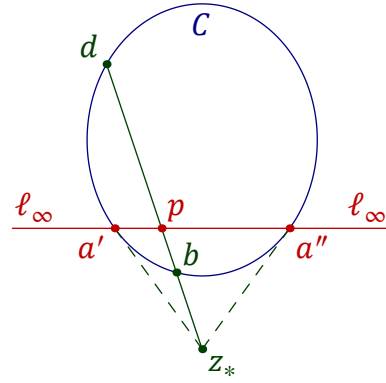


Рис. 21◊2. Центральная коника.

Полус z_* прямой ℓ_∞ относительно не являющейся параболой коники C называется *центром* коники C . Он лежит в евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 и является центром симметрии аффинной части коники, так как по [предл. 19.1](#) на стр. 238 на любой проходящей через z_* прямой, пересекающей конику в точках b, d , а бесконечность в точке p , двойное отношение $[p, z_*, b, d] = -1$, т. е. z_* является серединой отрезка $[b, d]$ в аффинной карте, для которой $p = \infty$. По этой причине эллипсы и гиперболы в совокупности называются *центральной кониками*. Проходящие через центр прямые называются *диаметрами* центральной коники C . Касательные диаметры $(z_* a')$ и $(z_* a'')$, идущие из центра в асимптотических направлениях, называются *асимптотами*. Гипербола имеет вещественные асимптоты, эллипс — невещественные комплексно сопряжённые.

УПРАЖНЕНИЕ 21.2. Покажите, что любой диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные¹ сопряжённому диаметру.

Если коника C задаётся в стандартном ортонормальном базисе в \mathbb{R}^2 неоднородным уравнением

$$f(x_1, x_2) = \beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \beta_{22}x_2^2 + 2\beta_{01}x_1 + 2\beta_{02}x_2 + \beta_{00} = 0, \quad (21-3)$$

то её проективное замыкание² имеет в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ на \mathbb{P}_2 матрицу Грама

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (21-4)$$

Невырожденность коники C означает, что $\det B \neq 0$, а непустота — что сигнатура отлична от $(3, 0)$ и $(0, 3)$, т. е. что последовательность знаков главных нижних угловых миноров

$$\Delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{22}, \quad \Delta_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2, \quad \Delta_{012} \stackrel{\text{def}}{=} \det B$$

отлична от $+++$ и $+-$. Асимптотические направления $\{a', a''\} = C \cap \ell_\infty$ коники C суть корни однородной квадратной формы от (x_1, x_2) с матрицей Грама

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (21-5)$$

¹По определению, прямые *параллельные* данной $\ell \subset \mathbb{P}_2$ суть все прямые из пучка с центром в точке $\ell \cap \ell_\infty$, за исключением самих прямых ℓ и ℓ_∞ .

²См. п.° 17.4.3 на стр. 217.

Гладкая непустая вещественная коника C является эллипсом, параболой или гиперболой если и только если определитель¹ $\Delta_{12} = \det B_\infty$, соответственно, положителен, равен нулю или отрицателен. Однородные координаты полюса $z_* = (z_0 : z_1 : z_2)$ бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$ удовлетворяет уравнению $(z_0 : z_1 : z_2)B = (1 : 0 : 0)$, т. е. пропорциональны первой строке присоединённой матрицы B^V к матрице Грама B коники C :

$$(z_0 : z_1 : z_2) = (\Delta_{12} : \beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}). \quad (21-6)$$

Для центральной коники эта формула позволяет найти аффинные координаты центра в карте U_0 :

$$(z_1, z_2) = \left(\frac{\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22}}{\Delta_{12}}, \frac{\beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}}{\Delta_{12}} \right). \quad (21-7)$$

Для параболы $\Delta_{12} = 0$, и формула (21-7) даёт координаты направления оси параболы:

$$(x_1 : x_2) = (\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}). \quad (21-8)$$

21.2.1. Окружности. Сопряжение² относительно центральной коники C задаёт на бесконечности инволюцию, неподвижными точками которой являются асимптотические направления коники C . Если эта инволюция совпадает с перпендикулярностью³, что равносильно совпадению асимптотических направлений коники C с абсолютными направлениями⁴ l_\pm , то коника C называется *окружностью*. Это определение согласуется со школьным: проективное замыкание «школьной» окружности радиуса r с центром в точке $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ задаётся на \mathbb{P}_2 однородным уравнением $(x_1 - c_1 x_0)^2 + (x_2 - c_2 x_0)^2 = r^2 x_0^2$ и пересекает бесконечно удалённую прямую $x_0 = 0$ в точности по абсолютности $x_1^2 + x_2^2 = 0$; наоборот, выбирая на непустой гладкой вещественной конике C три неколлинеарных вещественных точки p_1, p_2, p_3 , видим, что если такая коника проходит через точки l_\pm , то она совпадает со «школьной» окружностью, проходящей через точки p_1, p_2, p_3 , поскольку через пять точек проходит ровно одна гладкая коника.

21.2.2. Главные оси центральной коники. Если центральная коника C не является окружностью, то согласно [сл. 18.4](#) на стр. 235 существуют ровно два направления $x_*, y_* \in \ell_\infty$, одновременно перпендикулярные друг другу и сопряжённые относительно коники C . Эти направления автоматически различны, поскольку равенство $x_* = y_*$ означает, что эта точка совпадает с одной из точек l_\pm , а вещественная коника, проходящая через одну из точек l_\pm автоматически проходит и через комплексно сопряжённую ей вторую точку l_\mp , а значит, является окружностью. Перпендикулярные сопряжённые друг другу относительно C направления называются *главными осями* коники C . Их легко найти явно: если $x_* = (x_1 : x_2)$, то $y_* = (-x_2 : x_1)$ в силу перпендикулярности, а сопряжённость относительно C означает, что

$$0 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \beta_{12}x_1^2 - (\beta_{11} - \beta_{22})x_1x_2 - \beta_{12}x_2^2, \quad (21-9)$$

откуда

$$x_* = (\beta_{11} - \beta_{22} + \sqrt{D} : 2\beta_{12}), \quad y_* = (\beta_{11} - \beta_{22} - \sqrt{D} : 2\beta_{12}), \quad (21-10)$$

где $D = (\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{12}^2$.

¹Противоположный по знаку дискриминанту бинарной квадратичной формы с матрицей Грама B_∞ , см. [прим. 15.1](#) на стр. 189 и [прим. 17.6](#) на стр. 212.

²См. п° 19.1.2 на стр. 238.

³См. п° 21.1.2 на стр. 263.

⁴См. формулу (21-2) на стр. 263.

УПРАЖНЕНИЕ 21.3. Убедитесь, что x_* и y_* являются собственными векторами симметричной матрицы B_∞ из формулы (21-5) с собственными числами, соответственно, равными¹

$$(\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{D})/2 \quad \text{и} \quad (\beta_{11} + \beta_{22} - \sqrt{D})/2.$$

Поскольку центр z_* является полюсом прямой $\ell_\infty = (x_*y_*)$, треугольник $\Delta x_*y_*z_*$ автополярен относительно коники C . Таким образом, матрица Грама коники C в базисе x_*, y_*, z_* диагональна, и в аффинном координатном репере карты U_0 с началом в точке z_* и евклидово перпендикулярными базисными векторами x_* и y_* коника C задаётся неоднородным уравнением вида

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$$

где $\alpha = -f(x_*)/f(z_*)$, $\beta = -f(y_*)/f(z_*)$, а $f(x_1, x_2)$ — исходный неоднородный многочлен (21-3), задающий конику C .

21.3. Геометрия центральных коник. Точка $f \in \mathbb{P}_2 \setminus \ell_\infty$ называется *фокусом* центральной коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если обе прямые $(f\iota_+)$ и $(f\iota_-)$ касаются коники C . Поляры фокусов относительно коники C называются *директрисами* этой коники. Таким образом, центральная коника имеет четыре различных фокуса, см. рис. 21◊3.

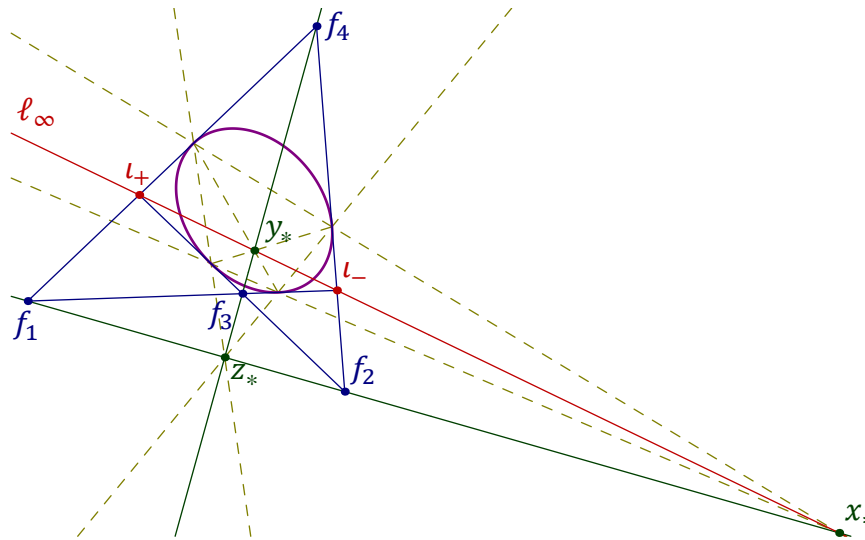


Рис. 21◊3. Фокусы, директрисы и главные оси центральной коники.

Комплексное сопряжение переставляет между собою абсолютные направления ι_\pm и переводит касательные ℓ_1, ℓ_2 , опущенные на C из ι_+ , в касательные $\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2$, опущенные из $\iota_- = \bar{\iota}_+$. Поэтому фокусы $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \bar{\ell}_1$ и $f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \bar{\ell}_2$ вещественны, а фокусы $f_3 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \bar{\ell}_2$ и $f_4 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \bar{\ell}_1$ не вещественны и комплексно сопряжены друг другу. Обозначим через $\Delta x_*y_*z_*$ треугольник, ассоциированный с вписанным в конику C четырёхвершинником, который образован точками касания с коникой четырёх фокальных касательных, опущенных из точек ι_\pm . Согласно предл. 20.1 на стр. 255 этот треугольник автополярен относительно коники C . Поскольку точка x_* лежит

¹Эти числа суть корни характеристического многочлена $\lambda^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})\lambda + \Delta_{12}$ матрицы B_∞ . Обратите внимание, что он имеет тот же дискриминант $D = (\beta_{11} + \beta_{22})^2 - 4(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) = (\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{12}^2$, что и многочлен (21-9).

на полярах фокусов f_3 и f_4 , прямая (f_3f_4) является полярной точки x_* и, значит, совпадает с прямой (y_*z_*) . По той же причине прямая (f_1f_2) совпадает с прямой (x_*z_*) , а прямая $(l_+l_-) = l_\infty$ — с прямой (x_*y_*) , см. рис. 21◊3. Таким образом, прямые (f_1f_2) и (f_3f_4) пересекаются в центре z_* коники C и пересекают бесконечность в точках $x_* = l_\infty \cap (f_1f_2)$ и $y_* = l_\infty \cap (f_2f_3)$, которые являются главными осями коники C , ибо $[x_*, y_*, l_+, l_-] = -1$, так как в пучке прямых с центром в фокусе f_1 касательные прямые (f_1l_+) и (f_1l_-) гармоничны сопряжённым относительно C прямых¹ (f_1x_*) и (f_1y_*) .

Упражнение 21.4. Покажите, что пересекающиеся в точке y_* пунктирные прямые на рис. 21◊3 проходят через фокусы f_1 и f_2 .

Пример 21.2

Выясним тип коники C , задаваемой в стандартных координатах на \mathbb{R}^2 уравнением

$$-2x_1^2 + 12x_1x_2 - x_2^2 + 10x_1 - 6x_2 = 4, \quad (21-11)$$

и найдём её центр, асимптоты и главные оси. Проективное замыкание коники C задаётся в \mathbb{P}_2 однородным уравнением $-4x_0^2 + 10x_0x_1 - 6x_0x_2 - 2x_1^2 + 12x_1x_2 - x_2^2 = 0$ с матрицей Грама

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21-12)$$

По форм. (21-7) на стр. 265 однородные координаты центра суть

$$\left(\det \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \right) = (-10 : -13 : 24),$$

откуда аффинные координаты центра в стандартном базисе \mathbb{R}^2 равны $(z_1, z_2) = (13/10, 12/5)$. Пересечение коники C с бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$ задаётся уравнением

$$2x_1^2 - 12x_1x_2 + x_2^2 = 0,$$

которое имеет два вещественных корня $(x_1 : x_2) = (2 : 6 \pm \sqrt{34})$. Поэтому коника C является гиперболой, и её асимптоты задаются в стандартных координатах на \mathbb{R}^2 уравнениями $(6 \pm \sqrt{34})(x_1 - 13/10) = 2(x_2 - 12/5)$. Направления главных осей коники C являются корнями уравнения из форм. (21-10) на стр. 265: $6x_1^2 + x_1x_2 - 6x_2^2 = 0$ и равны $(12 : -1 \pm \sqrt{145})$.

Пример 21.3

Центр и главные оси центральной коники, заданной аффинным уравнением

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1, \quad \text{где } \alpha > 0, \quad (21-13)$$

имеют однородные координаты $z_* = (1 : 0 : 0)$, $x_* = (0 : 1 : 0)$, $y_* = (0 : 0 : 1)$. Точка $f = z_* + tx_* \in (z_*x_*)$ является фокусом если и только если ограничение однородного уравнения коники на прямую (fl_+) вырождено. Это ограничение имеет в базисе f, l_+ матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t^2 - 1 & iat \\ iat & \beta - \alpha \end{pmatrix}$$

¹См. сл. 19.1 на стр. 239.

с определителем $\alpha\beta t^2 + \beta - \alpha$, который зануляется при $t = \pm\sqrt{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}$. Таким образом, два лежащих на оси (z_*x_*) фокуса коники (21-13) имеют аффинные координаты $(\pm\sqrt{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}, 0)$. Симметричным образом, два лежащих на перпендикулярной оси (z_*y_*) фокуса имеют аффинные координаты $(0, \pm\sqrt{\beta^{-1} - \alpha^{-1}})$. При $\beta > \alpha$ или $\beta < 0$ первые два фокуса вещественны, а вторые — чисто мнимы и комплексно сопряжены, при $0 < \beta < \alpha$ всё наоборот. При $\beta < 0$ коника (21-13) является гиперболой, при $0 < \beta < \alpha$ и $\beta > \alpha$ — эллипсом. При $\alpha = \beta$ коника превращается в окружность и все четыре фокуса сливаются с её центром. У эллипса и гиперболы, заданных на евклидовой плоскости своими стандартными аффинными уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{в которых } \alpha = \frac{1}{a^2}, \beta = \frac{1}{b^2}, a, b \in \mathbb{R},$$

вещественные фокусы располагаются так, как показано на рис. 21◊4 и рис. 21◊5.

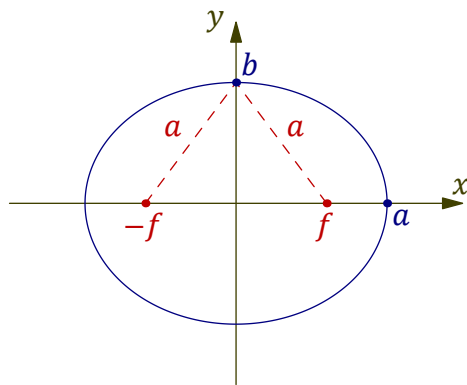


Рис. 21◊4. Вещественные фокусы эллипса.

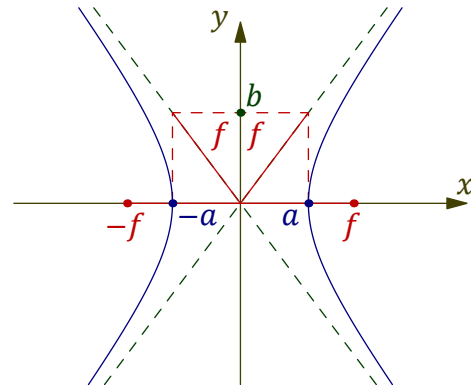


Рис. 21◊5. Вещественные фокусы гиперболы.

21.3.1. Директор центральной коники. Сопряжение относительно центральной коники C задаёт гомографию $\delta_C : \iota_+^{\times} \simeq \iota_-^{\times}$ между пучками прямых с центрами в точках ι_{\pm} . Она переводит прямую $\ell \ni \iota_+$ в сопряжённую ей относительно C прямую $\delta_C(\ell) \ni \iota_-$, см. рис. 21◊6.

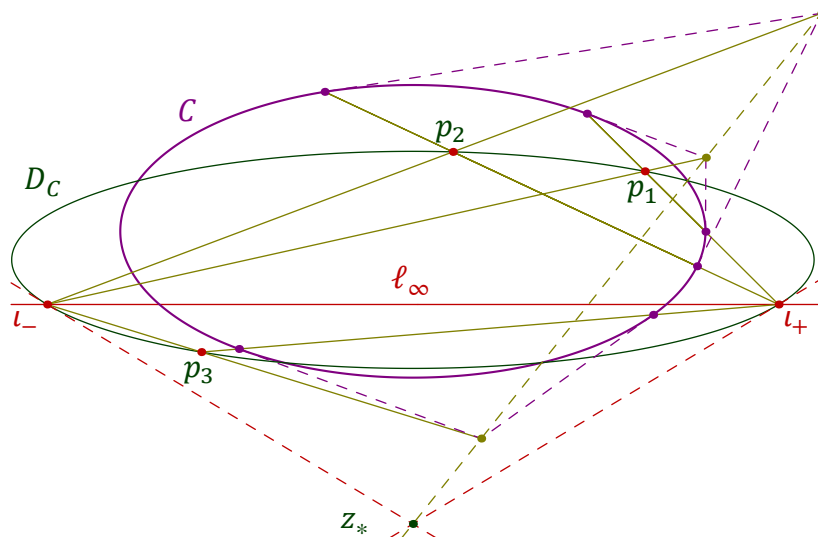


Рис. 21◊6. Директор центральной коники.

Пусть точка $p = \ell \cap \delta_C(\ell)$ является точкой пересечения соответственных прямых¹. На пучке $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ всех проходящих через p прямых коника C также задаёт инволюцию, переставляющую между собою сопряжённые относительно C прямые. Так как неподвижными точками этой инволюции являются две опущенные из p на C касательные, сопряжённые относительно C прямые $\ell, \delta_C(\ell) \in p^\times$ гармоничны² в пучке p^\times паре касательных, опущенных из p на C . Стало быть, эти касательные перпендикулярны. Наоборот, если точка $p \in \mathbb{P}_2$ такова, что опущенные из неё на конику C касательные перпендикулярны, т. е. сопряжены прямым $(p\iota_+)$ и $(p\iota_-)$, то последние две прямые сопряжены друг другу относительно коники C , т. е. переводятся друг в друга гомографией $\delta_C: \iota_+^\times \simeq \iota_-^\times$. Мы заключаем, что ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \delta_C(\ell)$ совпадает с ГМТ $p \in \mathbb{P}_2$, из которых коника C видна под прямым углом. Согласно предл. 18.2 на стр. 229, ГМТ пересечения соответственных прямых неперспективной гомографии между двумя пучками прямых является гладкой коникой, проходящей через центры пучков, как на рис. 21◊6. Поскольку в нашем случае центрами пучков служат точки ι_\pm , эта коника — окружность. Она называется директором центральной коники C и обозначается D_C . Так как³ $\delta_C(\ell_\infty) = T_{\iota_-}D_C$ и $\delta_C(T_{\iota_+}D_C) = \ell_\infty$, обе пары прямых $\ell_\infty, T_{\iota_+}D_C$ и $\ell_\infty, T_{\iota_-}D_C$ гармоничны касательным, опущенным на конику C из точек ι_\pm . Тем самым, прямая ℓ_∞ сопряжена относительно коники C обоим касательным к окружности D_C в точках ι_\pm . Следовательно, эти касательные пересекаются в полюсе z_* прямой ℓ_∞ относительно коники C , т. е. директор концентричен C .

Упражнение 21.5. Напишите явное уравнение директора D_C в главных осях коники C .

21.3.2. Софокусные семейства центральных коник. Гладкие вещественные коники с теми же самыми фокусами⁴, что и заданная гладкая центральная коника C , лежат в семействе комплексных коник на \mathbb{P}_2 , касающихся фиксированных четырёх прямых — опущенных из точек ι_\pm на конику C касательных, см. рис. 21◊3 на стр. 266. Все эти коники имеют общие центр и главные оси, а двойственные им коники в \mathbb{P}_2^\times образуют простой пучок F коник, проходящих через четыре точки, двойственные прямым

$$(\iota_+f_1) = (\iota_+f_4), \quad (\iota_+f_2) = (\iota_+f_3), \quad (\iota_-f_2) = (\iota_-f_4), \quad (\iota_-f_1) = (\iota_-f_3). \quad (21-14)$$

Три распавшиеся коники этого пучка суть объединение пар прямых, изображающих пучки прямых на \mathbb{P}_2 , с центрами в точках $\iota_\pm, f_{1,2}$ и $f_{3,4}$:

$$\iota_+^\times \cup \iota_-^\times, \quad f_1^\times \cup f_2^\times, \quad f_3^\times \cup f_4^\times. \quad (21-15)$$

Для любой точки $p \in \mathbb{P}_2$ на пучке $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ проходящих через p прямых имеется инволюция Дезарга⁵ $\sigma_F: p^\times \simeq p^\times$, которая задаётся пучком коник F и переставляет между собою проходящие через p прямые ℓ_1 и ℓ_2 если и только если эти прямые касаются некоторой софокусной с C коники Q . Прямая $\ell \ni p$ является неподвижной точкой инволюции σ_F если и только если она касается некоторой софокусной с C коники в точке p . Поскольку инволютивная гомография над полем \mathbb{C} имеет ровно две различные неподвижные точки⁶, через любую точку $p \in \mathbb{P}_2$ проходят ровно две софокусных с C коники C'_p, C''_p . Касательные к этим коникам прямые $\ell' = T_p C'_p$

¹На рис. 21◊6 показаны три такие точки: p_1, p_2 и p_3 .

²См. сл. 19.1 на стр. 239.

³См. предл. 18.2 на стр. 229.

⁴Обратите внимание, что для этого достаточно, чтобы два вещественных фокуса были общими.

⁵См. прим. 20.1 на стр. 255.

⁶См. прим. 18.5 на стр. 234.

и $\ell'' = T_p C_p''$, будучи неподвижными точками инволюции Дезарга, гармоничны любой паре прямых, переставляемых этой инволюцией. Пересекая прямую $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с тремя распавшимися кониками (21-15) из пучка F , мы видим, что σ_F переставляет между собою пары прямых

$$(p_{\iota_+}) \overset{\sigma_c}{\leftrightarrow} (p_{\iota_-}), \quad (pf_1) \overset{\sigma_c}{\leftrightarrow} (pf_2), \quad (pf_3) \overset{\sigma_c}{\leftrightarrow} (pf_4).$$

Это приводит к равенству $[\ell', \ell'', (p_{\iota_+}), (p_{\iota_-})] = -1$, означающему, что неподвижные прямые ℓ' и ℓ'' перпендикулярны¹. Тем самым, две проходящие через p софокусные C коники пересекаются в точке p под прямым углом, как на рис. 21◊7. Так как инволюция Дезарга сохраняет двойные отношения, $[\ell', (pf_1), (p_{\iota_+}), (p_{\iota_-})] = [\ell', (pf_2), (p_{\iota_-}), (p_{\iota_+})] = \overline{[\ell', (pf_2), (p_{\iota_+}), (p_{\iota_-})]}$, т. е. острые углы, которые прямая ℓ' образует с прямыми (pf_1) и (pf_2) равны друг другу в силу прим. 21.1 на стр. 263. По той же причине равны друг другу и острые углы, которые образует с прямыми (pf_1) и (pf_2) прямая ℓ'' , а также острые углы, которые каждая из прямых ℓ', ℓ'' образует с касательными, опущенными из точки p на любую софокусную с C конику. Иначе говоря, перпендикулярные касательные ℓ', ℓ'' к двум проходящим через p софокусным с C коникам являются биссектрисами углов между прямыми (pf_1) и (pf_2) , соединяющими точку p с вещественными фокусами, а также биссектрисами углов между двумя касательными прямыми, опущенными из p на любую не проходящую через p софокусную с C конику, см. рис. 21◊7. Эти факты известны как *фокальные свойства геометрической оптики*.

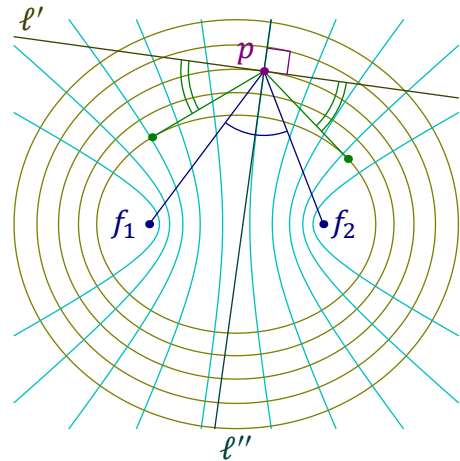


Рис. 21◊7. Софокусные центральные коники.

Предложение 21.1

Для любых точки p и гладкой центральной коники C с вещественными фокусами f_1, f_2 угол между прямой (pf_1) и опущенной из p на C касательной равен углу между второй касательной и прямой (pf_2) . □

Предложение 21.2

Все отражённые гладкой центральной коникой лучи света от точечного источника в её вещественном фокусе проходят через другой вещественный фокус. □

Пример 21.4

Если центральная коника $C \subset \mathbb{R}^2$ имеет уравнение $ax^2 + by^2 = 1$, то двойственная ей коника $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ задаётся однородным уравнением $-x_0^2 + a^{-1}x_1^2 + b^{-1}x_2^2 = 0$, а распавшаяся коника $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ — уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Натянутый на них пучок коник на \mathbb{P}_2^\times описывается однопараметрическим уравнением $-x_0^2 + (a^{-1} + \lambda) \cdot x_1^2 + (b^{-1} + \lambda) \cdot x_2^2 = 0$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Двойственные им коники софокусной с C системы коник на \mathbb{P}_2 имеют аффинные уравнения

$$\frac{x^2}{a^{-1} + \lambda} + \frac{y^2}{b^{-1} + \lambda} = \frac{ax^2}{1 + a\lambda} + \frac{by^2}{1 + b\lambda} = 1.$$

¹См. п° 21.1.2 на стр. 263.

²См. предл. 19.2 на стр. 239.

Упражнение 21.6. Покажите, что из двух пересекающихся в заданной точке коник софокусной системы одна является эллипсом, а другая — гиперболой.

21.3.3. Гипербола Аполлония. Для произвольных точки p и гладкой центральной коники C с центром в точке z_* обозначим через $\varphi : z_*^x \simeq p^x$ гомографию пучка диаметров коники C в пучок прямых с центром в p , переводящую диаметр $\ell \ni z_*$ в опущенный из точки p перпендикуляр ℓ_p на сопряжённый к ℓ относительно коники C диаметр $\ell' \ni z_*$, см. рис. 21◊8.

Упражнение 21.7. Убедитесь, что это и впрямь гомография.

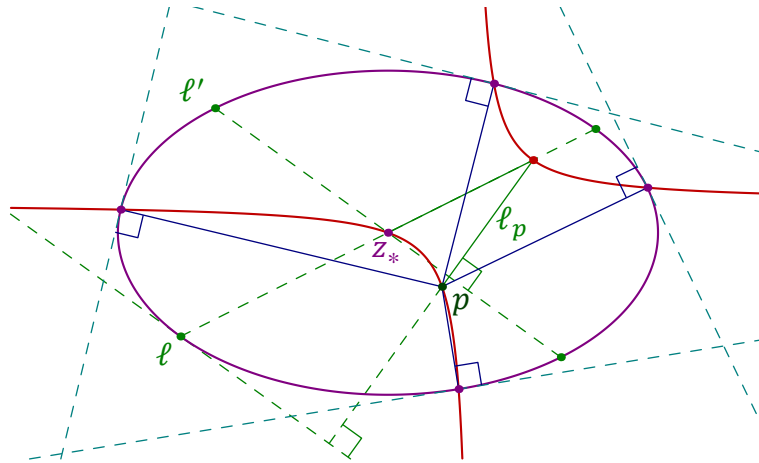


Рис. 21◊8. Гипербола Аполлония точки p относительно эллипса.

Согласно предл. 18.2 на стр. 229, ГМТ пересечения соответствующих прямых $\ell \cap \ell_p$ является коникой H , проходящей через центр коники C и точку p . Поскольку гомография φ переводит главные направления (z_*x_*) и (z_*y_*) в прямые (px_*) и (py_*) соответственно, коника H является гиперболой с асимптотами, параллельными главным осям коники C . Она называется *гиперболой Аполлония* точки p относительно коники C и замечательна тем, что пересекает конику C ровно по таким точкам $a \in C$, для которых прямая (pa) перпендикулярна касательной T_aC к конике C в точке a , поскольку сопряжённый к ℓ диаметр ℓ' параллелен касательным, восстановленным в концах диаметра ℓ , см. рис. 21◊8. В качестве следствия мы заключаем, что из произвольной точки p на гладкую центральную конику C можно опустить не более четырёх перпендикуляров.

21.4. Геометрия парабол. Парабола P , касающаяся бесконечности в точке $x_* = \ell_\infty \cap P$, может рассматриваться как предельное положение центральной коники, которую сдвинули так, что её центр слился с тремя фокусами f_2, f_3, f_4 в одну точку $x_* \in \ell_\infty$ — направление оси¹ параболы P , см. рис. 21◊9. Директрисы фокусов f_2, f_3, f_4 при этом тоже сливаются друг с другом и превращаются в прямую ℓ_∞ . Единственный оставшийся конечный фокус $f = f_1$ называется *фокусом*, а его поляра — *директрисой* параболы P . Конечная точка пересечения параболы с прямой (x_*f) обозначается через z_* и называется *вершиной* параболы. Все они автоматически вещественны. Точки x_* и $y_* = T_cP \cap \ell_\infty$ называются *главными осями* параболы P . Они сопряжены относительно параболы и перпендикулярны. Первое очевидно из рис. 21◊9, второе выражает тот факт, что

¹См. рис. 21◊2 на стр. 264.

в пучке прямых с центром в f_1 сопряжённые относительно коники C направления x_* , y_* гармоничны абсолютным касательным направлениям.

УПРАЖНЕНИЕ 21.8. Покажите, что середины хорд, отсекаемых из параболы любым пучком параллельных прямых, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

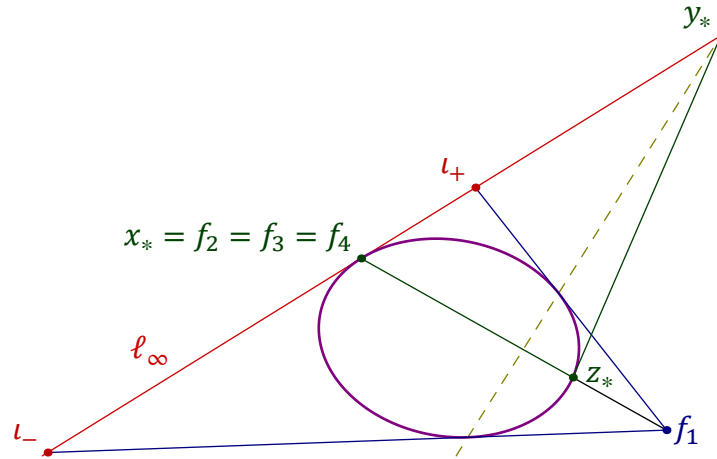


Рис. 21◊9. Фокус, директриса и ось параболы.

Так как анизотропный вектор y_* сопряжён относительно P обеим точкам x_* , z_* , и обе они изотропны, однородное уравнение параболы в базисе x_* , y_* , z_* записывается в виде $y^2 = 2axz$, где $a > 0$. В аффинном репере карты U_0 с началом в z_* и евклидово перпендикулярными осями координат x_* , y_* это уравнение преобразуется в неоднородное уравнение $y^2 = 2ax$.

УПРАЖНЕНИЕ 21.9. Убедитесь, что фокус такой параболы находится в точке $(a/2, 0)$, а директриса задаётся уравнением $x = -a/2$.

ПРИМЕР 21.5 (ОТЫСКИВАНИЕ ВЕРШИНЫ ПАРАБОЛЫ)

Определим тип коники C , заданной в ортонормальном базисе евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 уравнением $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$. Матрица Грама её проективного замыкания

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

По форм. (21-6) на стр. 265 полюс бесконечно удалённой прямой l_∞ находится в точке

$$x_* = \left(\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right) = (0 : -2 : -1) \in l_\infty.$$

Тем самым, коника является параболой. Её ось параллельна вектору $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$, т. е. проходит через изотропную точку $x_* = (0 : 2 : 1) \in l_\infty$, и является полярной евклидово перпендикулярной к x_* точки $y_* = (0 : -1 : 2) \in l_\infty$, т. е. задаётся уравнением $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ с коэффициентами $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) = (0 : -1 : 2)B = (-8 : -5 : 10)$. Вершина z_* параболы C является второй, отличной от x_* , изотропной точкой квадратичной формы B на оси и

может быть получена отражением точки x_* в B -ортогонале к любой лежащей на оси анизотропной точке. Беря в качестве таковой $a = (5, -8, 0)$, находим $(5, -8, 0)B = (-1, 2, 1)$. Обозначая через β скалярное произведение с матрицей Грама B , получаем

$$\beta(a, x_*) = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \beta(a, a) = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = -21,$$

$$z_* = \sigma_a(x_*) \sim \beta(a, a)x_* - 2\beta(a, x_*)a = 21(0, 2, 1) + 10(5, -8, 0) = (50 : -38 : 21).$$

Таким образом, вершина параболы имеет аффинные координаты $(-19/25, 21/50)$.

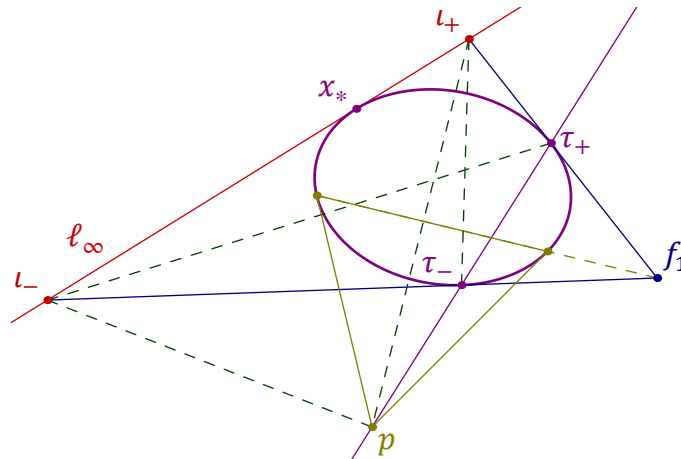


Рис. 21♦10. Директор параболы совпадает с её директрисой.

Пример 21.6 (директор параболы совпадает с директрисой)

Гомография $\delta_p : l_+^x \rightleftharpoons l_-^x$, задаваемая сопряжением прямой параболы¹ P , перспективна, так как соединяющая центры пучков прямая l_∞ самосопряжена. Поэтому ГМТ пересечения соответственных прямых этой гомографии распадается в объединение² прямой l_∞ и прямой, соединяющей точки пересечений каких-нибудь двух пар соответственных прямых. Таковыми являются точки τ_+ и τ_- пересечения параболы с фокальными касательными, см. рис. 21♦10. Поэтому директриса параболы представляет собою ГМТ, из которых параболу видно под прямым углом³, т. е. директор параболы.

Следствие 21.1

Касательные к параболы, проведённые через концы любой фокальной хорды, пересекаются на директрисе под прямым углом.

Доказательство. Поскольку полюс p любой фокальной хорды сопряжён фокусу параболы, он лежит на директрисе параболы, см. рис. 21♦10. \square

¹См. н° 21.3.1 на стр. 268.

²См. предл. 18.2 на стр. 229.

³Ибо такие точки как раз и являются точками пересечения сопряжённых относительно P прямых, проходящих через l_\pm , см. н° 21.3.1 на стр. 268.

21.4.1. Софокусные параболы. Параболы называются *софокусными*, если у них один и тот же фокус f и параллельные оси¹. Семейство парабол, софокусных заданной параболе P , состоит из всех коник, вписанных в треугольник $f l_- l_+$ и касающихся его стороны $l_\infty = (l_- l_+)$ в фиксированной точке x_* . Двойственные им коники образуют в \mathbb{P}_2^\times пучок с тремя базисными точками² — сторонами треугольника $f_1 l_- l_+$. Он порождён двумя распавшимися кониками — объединением пучков $x_*^\times \cup f^\times$ с особой точкой, двойственной оси параболы, и объединением пучков $l_+^\times \cup l_-^\times$ с особой точкой l_∞^\times , которая лежит на прямой x_*^\times и в которой все коники пучка касаются этой прямой. Всё сказанное в н° 21.3.2 для софокусных центральных коник дословно сохраняет силу и для софокусных парабол: через любую точку $p \in \mathbb{P}_2$ проходят ровно две софокусные параболы, касательные к которым в точке p перпендикулярны друг другу и являются биссектрисами углов между прямой (pf) и проходящей через p прямой, параллельной оси параболы, а также углов между двумя касательными, опущенными из p на произвольную не проходящую через p софокусную с P параболу. Мы получаем следующие *фокальные свойства параболы*.

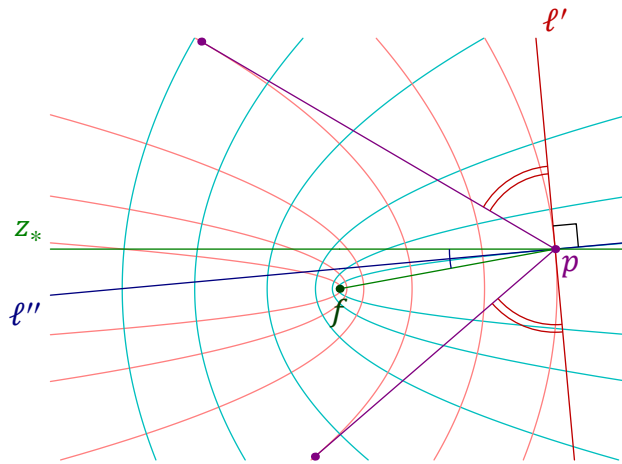


Рис. 21◊11. Софокусные параболы.

Предложение 21.3

Для любой точки p угол между касательной, опущенной из p на параболу P , и прямой (pf) , ведущей из p в фокус параболы, равен углу между второй касательной и осью параболы. \square

Предложение 21.4

Все отражённые параболой лучи от точечного источника в её фокусе идут параллельно оси параболы. \square

Пример 21.7

Если парабола P задаётся в стандартном ортонормальном базисе евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 каноническим уравнением $y^2 = 2ax$, то двойственная ей коника $P^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ имеет однородное уравнение $2a^{-1}x_0x_1 - x_2^2 = 0$ и порождает вместе с задаваемой уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 0$ распавшейся коникой $l_+^\times \cup l_-^\times$ пучок коник $(1 + \lambda)x_2^2 + 2a^{-1}x_0x_1 + \lambda x_1^2 = 0$ на \mathbb{P}_2^\times . Двойственные им софокусные с P параболы на \mathbb{P}_2 имеют однородные уравнения $(1 + \lambda)^{-1}y^2 - 2axz + \lambda z^2 = 0$ и аффинные уравнения $y^2 = (1 + \lambda)(2ax - \lambda)$.

¹Т. е. один и тот же «бесконечно удалённый фокус» x_* .

²См. рис. 20◊4 на стр. 254.

21.4.2. Гипербола Аполлония из п° 21.3.3 существует и для любой параболы P .

УПРАЖНЕНИЕ 21.10. Убедитесь в этом!

Отличие от центральных коник заключается в том, что направление оси параболы $x_* = \ell_\infty \cap P$ является одной из точек пересечения гиперболы Аполлония с параболой. Поэтому в аффинной карте U_0 находится не более трёх точек пересечения параболы с гиперболой Аполлония, т. е. из произвольной точки плоскости на параболу можно опустить не более трёх перпендикуляров.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 21.1. Стандартный базис векторного пространства \mathbb{C}^2 над полем \mathbb{C} состоит из тех же самых векторов $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$, лежащих в $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, что и базис векторного пространства $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ над полем \mathbb{R} . Симметричная комплексно билинейная форма на \mathbb{C}^2 , продолжающая евклидово скалярное произведение на \mathbb{R}^2 , однозначно определяется тем, что имеет в этом базисе единичную матрицу Грама.

Упр. 21.2. Пусть $a, b \in \ell_\infty$ и диаметры (ca) , (cb) сопряжены. Тогда точки a, b сопряжены относительно C , т. е. a лежит на поляре точки b . Поскольку b лежит на поляре z_* , точка z_* тоже лежит на поляре b . Следовательно, диаметр (ca) является полярной точкой b , и любая проходящая через b прямая ℓ пересекает прямую (ca) по сопряжённой с b точке, которая по предл. 19.1 на стр. 238 является серединой отрезка, высекаемого коникой на прямой ℓ .

Упр. 21.3. Это вытекает из сл. 20.2 на стр. 260, но без труда проверяется и прямым вычислением.

Упр. 21.8. Поляра любой точки $w \in \ell_\infty$ проходит через полюс y_* прямой ℓ_∞ , т. е. параллельна оси параболы. Эта поляра пересекает любую прямую $\ell \ni w$ по такой точке u , что сопряжённые относительно P точки u, w гармоничны точкам пересечения $\ell \cap P$, т. е. u является серединой хорды $\ell \cap P$.

Упр. 21.9. Прямая $(f\iota_+)$, где $f = (1 : t : 0) = z_* + tx_* \in (z_*x_*)$, касается параболы если и только если матрица Грама векторов f, ι_+

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at & ia \\ ia & -1 \end{pmatrix}$$

вырождена, откуда $t = a/2$. Полярное преобразование переводит вектор $f = (1 : a/2 : 0)$ в прямую, однородное уравнение которой имеет коэффициенты

$$(1 : a/2 : 0) \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (a^2/2 : a : 0) = (a/2 : 1 : 0).$$