

§18. Проективные преобразования

18.1. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \simeq W$ задаёт биекцию $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(W)$ между одномерными подпространствами в U и W , которая называется *линейным проективным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

ПРИМЕР 18.1 (перспектива между гиперплоскостями)

Покажем, что для любой пары проективных гиперплоскостей $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и произвольной точки $p \notin L_1 \cup L_2$ центральная проекция гиперплоскости L_1 из точки p на гиперплоскость L_2 задаёт проективный изоморфизм между L_1 и L_2 , который мы будем обозначать $p : L_1 \simeq L_2$ и называть *перспективой* с центром в p . Пусть $L_1 = \mathbb{P}(U), L_2 = \mathbb{P}(W)$ и $p = \mathbb{P}(\mathbb{k} \cdot e)$. Тогда $V = W \oplus \mathbb{k} \cdot e$, ибо $p \notin L_2$, и центральная проекция из p задаётся ограничением линейной проекции $V \rightarrow W$ вдоль одномерного подпространства $\mathbb{k} \cdot e$ на подпространство $U \subset V$. Так как $p \notin L_1$, подпространство U имеет нулевое пересечение с ядром проекции и, стало быть, проектируется на W изоморфно.

ТЕОРЕМА 18.1

Для любых двух векторных пространств U, W одинаковой размерности $\dim U = \dim W = n+1$ и упорядоченных наборов из $n+2$ точек $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U), q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$, в каждом из которых никакие $n+1$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \simeq W$, такой что $\bar{F}(p_i) = q_i$ при всех i .

Доказательство. Зафиксируем какие-нибудь ненулевые векторы u_i и w_i , представляющие точки p_i и q_i , и возьмём наборы векторов $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ в качестве базисов векторных пространств U и W . В силу наложенных на точки условий все коэффициенты в разложениях $u_{n+1} = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ и $w_{n+1} = \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$ векторов u_{n+1} и w_{n+1} по этим базисам отличны от нуля, так как, к примеру, при $\alpha_i = 0$ точка p_{n+1} оказывается в одной гиперплоскости $x_i = 0$ с n базисными точками p_v , где $v \neq i$. Отображение $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ переводит p_i в q_i если и только если $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \mathbb{k}$. Поэтому матрица $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ оператора F в базисах \mathbf{u} и \mathbf{w} диагональна с ненулевыми элементами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали, причём каждый диагональный элемент удовлетворяет равенству $\lambda_i \alpha_i = \lambda_{n+1} \beta_i$, выражающему равенство i -х координат векторов $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$. Таким образом, набор диагональных элементов $\lambda_i = \lambda_{n+1} \alpha_i / \beta_i$ матрицы оператора F определяется однозначно с точностью до умножения на произвольную ненулевую константу λ_{n+1} . \square

Следствие 18.1

Два линейных изоморфизма тогда и только тогда задают равные проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. \square

ПРИМЕР 18.2 (четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \rightarrow S_3$)

Любые четыре точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие три из которых не коллинеарны, задают конфигурацию из трёх пар прямых, соединяющих пары точек для каждого из трёх различных способов разбить эти точки на две пары, см. рис. 18◊1. Эта конфигурация называется *четырёхвершинником $abcd$* , а каждая из трёх пар прямых — парой его *противоположных сторон*. Точки пересечений пар противоположных сторон $z = (ab) \cap (cd)$, $y = (ac) \cap (bd)$, $x = (ad) \cap (bc)$ и проходящие через них три прямые называют *ассоциированным треугольником xuz* четырёхвершинника

$abcd$. Согласно теор. 18.1, каждая перестановка точек a, b, c, d однозначно задаёт проективное преобразование $\mathbb{P}_2 \simeq \mathbb{P}_2$, переводящее четырёхвершинник $abcd$ в себя, а значит, как-то переставляющее вершины x, y, z ассоциированного с ним треугольника. Таким образом возникает гомоморфизм групп $\pi : S_4 \rightarrow S_3$. Поскольку транспозиции (ab) и (bc) переходят при этом в транспозиции (xy) и (yz) , гомоморфизм π биективно отображает подгруппу $S_3 \subset S_4$, образованную всеми оставляющими на месте вершину d перестановками вершин a, b, c , на группу перестановок вершин x, y, z , переводя каждую перестановку вершин a, b, c в точно такую же перестановку вершин x, y, z . Ядро $\ker \pi$ состоит из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций $(b, a, d, c), (c, d, a, b), (d, c, b, a)$. Эта подгруппа называется *четвертной группой Клейна* или *группой двуугольника* и обозначается, соответственно, через V_4 или D_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 18.1. Убедитесь, что $V_4 \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, а $S_4 \simeq V_4 \rtimes S_3$ является полупрямым нормальной подгруппы $V_4 \triangleleft S_4$ и дополнительной подгруппы $S_3 = \text{Stab}(d) \subset S_4$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.1 (ЛИНЕЙНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ГРУППЫ)

Согласно теор. 18.1 группа линейных проективных автоморфизмов пространства $\mathbb{P}(V)$ изоморфна фактору полной линейной группы $GL(V)$ по подгруппе $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$ скалярных гомотетий. Этот фактор обозначается $PGL(V) = GL(V)/H$ и называется *проективной линейной группой* векторного пространства V . Если фиксировать базис в V и отождествить $GL(V)$ с группой невырожденных матриц $GL_{n+1}(\mathbb{k})$, то группа $PGL(V)$ отождествится с группой $PGL_{n+1}(\mathbb{k})$ классов пропорциональности невырожденных матриц.

ПРИМЕР 18.3 (ДРОБНО ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ)

Группа $PGL_2(\mathbb{k})$ состоит из классов пропорциональности невырожденных матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Такая матрица действует на \mathbb{P}_1 по правилу

$$(x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)).$$

В стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$. Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три различные точки a, b, c в точки $\infty, 0, 1$ имеет вид

$$t \mapsto \frac{t-b}{t-a} \cdot \frac{c-a}{c-b}. \quad (18-1)$$

Образ точки $d \in \mathbb{P}_1$ при таком преобразовании называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек a, b, c, d и обозначается

$$[a, b, c, d] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

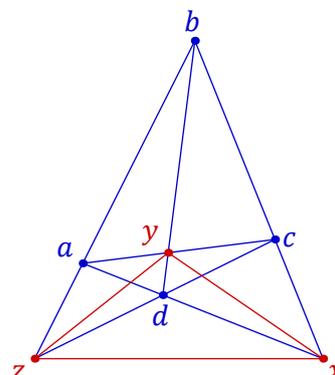


Рис. 18.1. Четырёхвершинник.

ТЕОРЕМА 18.2

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики нуль всякое биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \simeq \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое может быть задано в некоторой аффинной карте с координатой t формулой

$$\varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (18-2)$$

является ограничением некоторого линейного проективного изоморфизма $\mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$.

Доказательство. Переходя к однородным координатам $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0/x_1$, и меняя при необходимости конечное множество точек неопределённости отображения φ , перепишем формулу (18-2) в виде $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (f(x_0, x_1) : g(x_0, x_1))$, где f и g — взаимно простые однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $\deg f = \deg g = d$. Точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз если и только если однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot f(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot g(x_0, x_1)$ имеет на \mathbb{P}_1 ровно один корень $\zeta = \varphi^{-1}(\vartheta)$. Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень d -кратный, т. е.

$$\vartheta_1 \cdot f(x) - \vartheta_0 \cdot g(x) = \det^d(x, \zeta).$$

Поскольку алгебраически замкнутое поле \mathbb{k} бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек, прямая (fg) в пространстве \mathbb{P}_d однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) имеет бесконечно много точек пересечения с кривой Веронезе¹ $C_d \subset \mathbb{P}_d$, состоящей из d -тых степеней линейных двучленов. Поскольку при $d \geq 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой², мы заключаем, что $d = 1$ и $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$. \square

18.2. Гомографии. Линейные проективные изоморфизмы между проективными прямыми называются гомографиями.

УПРАЖНЕНИЕ 18.2. Пусть точка $p \in \mathbb{P}_2$ не лежит на прямой $L \subset \mathbb{P}_2$. Покажите, что отображение³ $p^\times \simeq L, \ell \mapsto \ell \cap L$, является гомографией между прямыми $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ и $L \subset \mathbb{P}_2$.

Следующим простейшим примером гомографии является перспектива⁴ $o : \ell_1 \simeq \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$, задаваемая проекцией из какой-нибудь точки $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$, как на рис. 18◊2. Отметим, что перспектива является композицией гомографий $\ell_1 \simeq o^\times \simeq \ell_2$ из упр. 18.2.

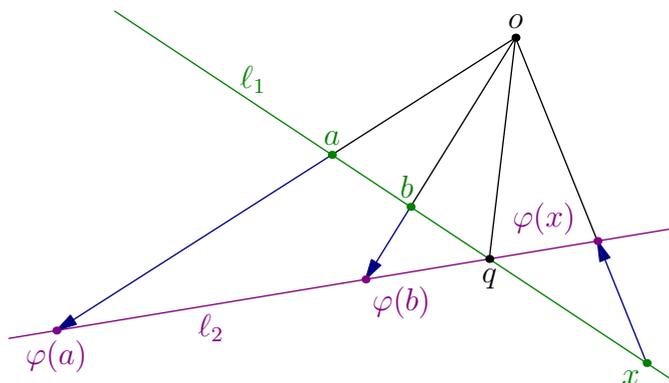


Рис. 18◊2. Перспектива.

Согласно теор. 18.1, каждая гомография однозначно определяется своим действием на три различные точки.

ЛЕММА 18.1

Гомография $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ является перспективой если и только если она переводит точку пересечения прямых $\ell_1 \cap \ell_2$ в себя.

¹См. п° 17.5.1 на стр. 218.

²См. предл. 17.3 на стр. 219.

³Прямая $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ состоит из всех проходящих через p прямых на \mathbb{P}_2 , см. п° 17.2.2 на стр. 210.

⁴См. прим. 18.1 на стр. 222.

Доказательство. Обозначая через o точку пересечения прямых $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$, соединяющих произвольные точки $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$ с их образами $\varphi(a), \varphi(b)$, как на рис. 18◊2, видим, что перспектива $o : \ell_1 \simeq \ell_2$ действует на три точки a, b и $\ell_1 \cap \ell_2$ так же, как и φ . \square

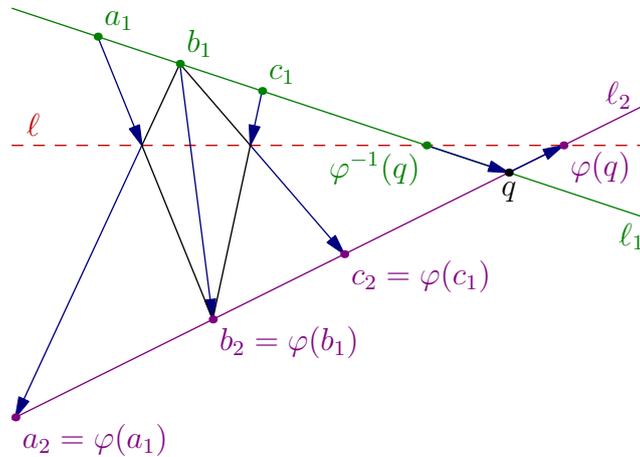


Рис. 18◊3. Перекрёстная ось.

Предложение 18.1 (Перекрёстная ось гомографии)

Каждая гомография $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ раскладывается в композицию $\varphi = b_1 \circ b_2$ двух перспектив $b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell$ и $b_1 : \ell \rightarrow \ell_2$ с центрами в точках $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$, см. рис. 18◊3. При этом точку $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ можно выбрать любой отличной от $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$, точка $b_2 = \varphi(b_1)$, а прямая ℓ не зависит от выбора b_1 , проходит через точки $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$ и $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ и представляет собою ГМТ пересечения «перекрёстных прямых» $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегает ℓ_1 . Более того, любое разложение гомографии φ в композицию $b_1 \circ b_2$ перспектив с центрами $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, b_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ имеет именно такой вид.

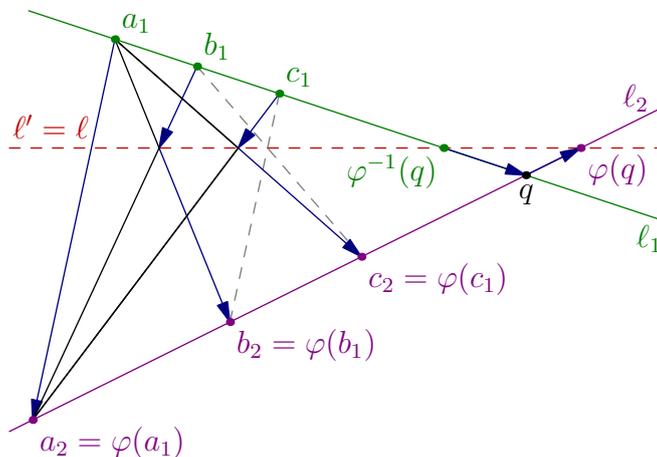


Рис. 18◊4. Равенство $\ell' = \ell$.

Доказательство. Пусть три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ и их образы $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ при гомографии φ таковы, что ни одна из этих шести точек не совпадает с точкой $q = \ell_1 \cap \ell_2$. Обозначим через ℓ прямую, проходящую через точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$. Так как композиция перспектив $b_1 \circ b_2$ переводит точки a_1, b_1, c_1 в a_2, b_2, c_2 , она совпадает с φ , см. рис. 18◊3.

Мы заключаем, что прямая ℓ проходит через точки¹ $\varphi(q)$, $\varphi^{-1}(q)$ и представляет собою ГМТ пересечения прямых $(b_1\varphi(x)) \cap (x\varphi(b_1))$, где $x \in \ell_1 \setminus b_1$. Повторяя это же рассуждение для тройки c_1, a_1, b_1 вместо тройки a_1, b_1, c_1 , как на рис. 18◊4, получим разложение $\varphi = a_1 \circ a_2$ в композицию перспектив $a_2: \ell' \rightarrow \ell$ и $a_1: \ell' \rightarrow \ell_2$, в котором прямая ℓ' тоже проходит через точки $\varphi(q)$, $\varphi^{-1}(q)$ и представляет собою ГМТ пересечения прямых $(a_1\varphi(y)) \cap (y\varphi(a_1))$, где $y \in \ell_1 \setminus a_1$. Поскольку обе прямые ℓ и ℓ' проходят через (возможно совпадающие) точки $\varphi(q)$, $\varphi^{-1}(q)$, а также через отличную от них точку $(b_1a_2) \cap (a_1b_2)$, эти прямые совпадают. Так как точки a_1 и b_1 выбирались произвольно, мы заключаем, что все разложения $\varphi = (x: \ell \rightarrow \ell_2) \circ (\varphi(x): \ell_1 \rightarrow \ell)$ имеют одну и ту же прямую ℓ , которая является ГМТ пересечения прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегает ℓ_1 . Последнее утверждение предложения вытекает из того, что в любом разложении $\varphi = b_1 \circ b_2$ с $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$ точка $b_2 = \varphi(b_1)$. \square

Упражнение 18.3. Для заданной пары прямых $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ и гомографии $\varphi: \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, переводящей заданные три точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в заданные три точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$, одной линейкой постройте образ $\varphi(x)$ данной точки $x \in \ell_1$.

Лемма 18.2

Для любых двух различных прямых ℓ_1, ℓ_2 на \mathbb{P}_2 , гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ и точек $p_1 \in C \setminus \ell_1, p_2 \in C \setminus \ell_2$ отображение $C_{p_2 p_1}: \ell_1 \rightarrow \ell_2$, задаваемое композицией центральной проекции $p_1: \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$ прямой ℓ_1 на конику C из точки p_1 и центральной проекции $p_2: C \xrightarrow{\sim} \ell_2$ коники C на прямую ℓ_2 из точки p_2 , является гомографией (см. рис. 18◊5).

Доказательство. Обе проекции $p_1: \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$ и $p_2: C \xrightarrow{\sim} \ell_2$ биективны и задаются в однородных координатах на плоскости квадратичными многочленами². Их композиция тоже биективна и задаётся многочленами. Согласно теор. 18.2 на стр. 223 она является гомографией. \square

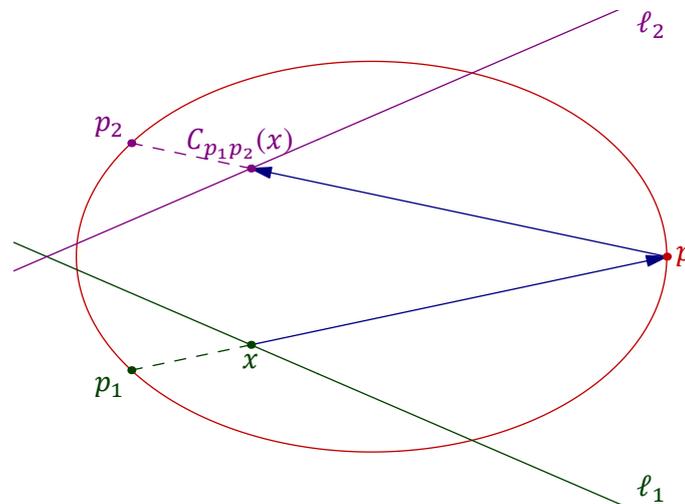


Рис. 18◊5. Гомография $C_{p_2 p_1}: \ell_1 \rightarrow \ell_2$.

18.2.1. Трассировка коники линейкой. Через любые пять точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 , никакие три из которых не коллинеарны, проходит единственная гладкая коника³ C . Точки этой коники

¹Которые могут совпадать, если гомография φ перспектива.

²См. формулу (17-9) на стр. 214.

³См. предл. 17.4 на стр. 220.

эффективно строятся одной линейкой. Для этого проведём прямые $\ell_1 = (q_1q_3)$, $\ell_2 = (q_2q_3)$ и отметим какую-нибудь точку $c \notin \ell_1 \cup \ell_2$, см. рис. 18◊6. Перспектива $c : \ell_1 \simeq \ell_2$ действует на точки q_3, q_1 и $r = \ell_1 \cap (p_1q_2)$ прямой ℓ_1 точно также, как гомография $C_{p_2p_1}$ из лем. 18.2. Поэтому каждая проходящая через точку c прямая ℓ пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 в таких точках t_1 и t_2 , что точка $x(\ell) = (p_1t_1) \cap (p_2t_2)$ лежит на конике C .

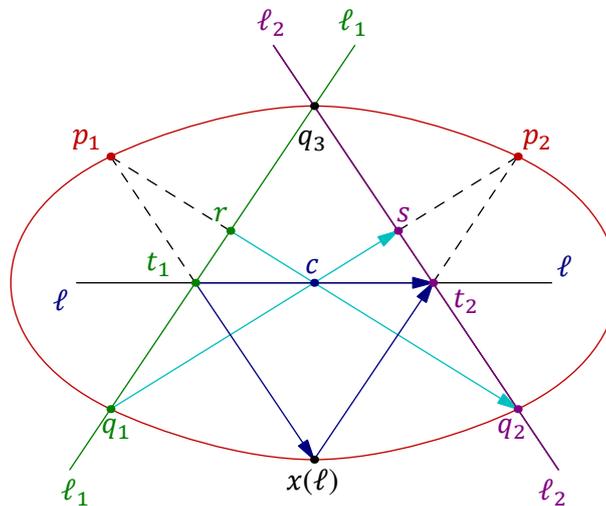


Рис. 18◊6. Трассировка коники линейкой.

Когда ℓ пробежит пучок прямых с центром в c , точка $x(\ell)$ нарисует конику C . Это наблюдение можно переформулировать следующим образом.

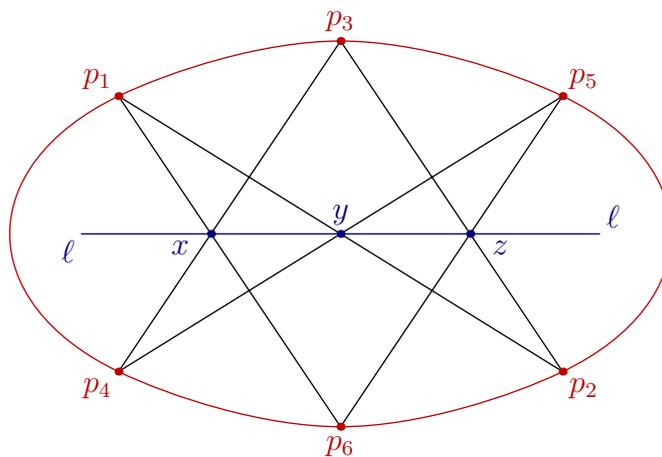


Рис. 18◊7. Гексограмма Паскаля.

ТЕОРЕМА 18.3 (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ)

Точки p_1, \dots, p_6 , никакие три из которых не коллинеарны, лежат на одной гладкой конике если и только если у «шестиугольника» p_1, \dots, p_6 три точки $x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1)$, $y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5)$, $z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$ пересечений пар «противоположных сторон» коллинеарны, см. рис. 18◊7.

Доказательство. Рассмотрим гладкую конику C , проходящую через первые пять заданных точек p_1, \dots, p_5 и отождествим рис. 18◊7 с рис. 18◊6, полагая $\ell_1 = (p_3p_4)$ и $\ell_2 = (p_3p_2)$. Если точки x, y, z коллинеарны, то z является образом x при перспективе $y : (p_3p_4) \rightarrow (p_3p_2)$,

которая совпадает с гомографией $C_{p_5 p_1} = (p_5 : C \simeq (p_3 p_2)) \circ (p_1 : (p_3 p_4) \simeq C)$. Поэтому $p_6 = (p_5 z) \cap (p_3 x) \in C$. Наоборот, если $p_6 \in C$ и $z = (p_3 p_2) \cap (p_5 p_6)$, то z является образом x при гомографии $C_{p_5 p_1}$, а значит, и при перспективе с центром в y , откуда $z \in (xy)$. \square

18.2.2. Гомографии между пучками прямых. Пусть прямые ℓ_1, ℓ_2 лежат на двойственной плоскости¹ \mathbb{P}_2^\times , т. е. представляют собою пучки прямых $\ell_1 = p_1^\times, \ell_2 = p_2^\times$ с центрами в различных точках $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$. Тогда лем. 18.1 и предл. 18.1 переформулируются в терминах исходной плоскости \mathbb{P}_2 следующим образом.

Следствие 18.2

Пусть прямые $\ell_1 \neq \ell_2$ независимо пробегают пучок прямых p_1^\times с центром в точке $p_1 \in \mathbb{P}_2$. Тогда для любой точки $p_2 \neq p_1$ и любой гомографии $\varphi : p_1^\times \simeq p_2^\times$ все прямые, соединяющие пары точек вида $\ell_1 \cap \varphi(\ell_2)$ и $\ell_2 \cap \varphi(\ell_1)$ пересекаются в одной точке, которая называется *перекрёстным центром* гомографии φ и лежит на прямых $\varphi(p_1 p_2)$ и $\varphi^{-1}(p_1 p_2)$, совпадающих если и только если гомография φ является перспективой, и в этом случае $\varphi(p_1 p_2) = \varphi^{-1}(p_1 p_2) = (p_1 p_2)$. \square

Упражнение 18.4. Пусть гомография $\varphi : p_1^\times \simeq p_2^\times$ переводит заданные три различные прямые $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$ в заданные прямые $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_2$. Одной линейкой постройте образ $\varphi(\ell)$ произвольной прямой $\ell \ni p_1$.

Предложение 18.2

Пусть гомография $\varphi : p_1^\times \simeq p_2^\times$ переводит три различные прямые $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$, отличные от прямой $(p_1 p_2)$, в прямые $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_2$, и пусть $q_i = \ell'_i \cap \ell''_i$, где $i = 1, 2, 3$. Тогда ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \varphi(\ell)$ представляет собою единственную конику, проходящую через пять точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 . Эта коника распадается если и только если гомография φ является перспективой², а для неперспективной гомографии она гладкая:

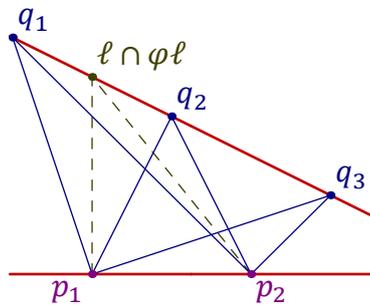


Рис. 18◊8. Перспектива $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$.

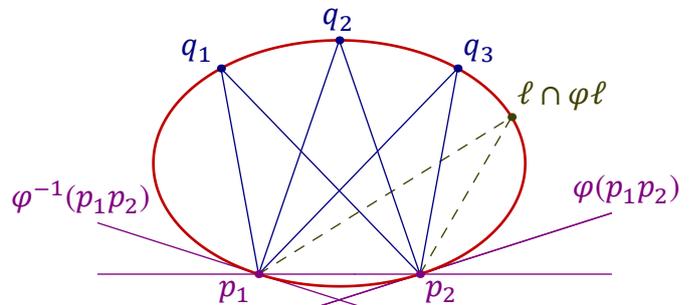


Рис. 18◊9. Неперспективная гомография $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$.

Наоборот, каждая гладкая коника C , содержащая точки p_1, p_2 (соотв. каждая прямая L , не проходящая через p_1 и p_2) задаёт гомографию $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ (соотв. $L : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$), которая переводит прямую $\ell \ni p_1$ в прямую, соединяющую точку p_2 с точкой $\ell \cap C$ (соотв. $\ell \cap L$). Гомография $L : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ переводит прямую $(p_1 p_2) = p_1^\times \cap p_2^\times$ в себя и является перспективой. Образом и прообразом прямой $(p_1 p_2)$ при гомографии $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ являются касательные прямые $T_{p_2} C$ и $T_{p_1} C$ соответственно.

¹См. п. 17.2.2 на стр. 210.

²Что равносильно тому, что гомография φ переводит прямую $(p_1 p_2) = p_1^\times \cap p_2^\times$ в себя.

Доказательство. Из условия вытекает, что ни одна из точек q_i не лежит на прямой $(p_1 p_2)$ и никакие четыре из пяти точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 не коллинеарны. По [предл. 17.4](#) на стр. 220 через них проходит единственная коника C . Если она гладкая, то отображение $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$, переводящее прямую $(p_1 p)$ в прямую (p_2, p) для каждой точки $p \in C$, является гомографией.

УПРАЖНЕНИЕ 18.5. Убедитесь в этом.

Поскольку эта гомография действует на тройку прямых ℓ'_i точно также, как φ , она совпадает с φ , что доказывает предложение в случае, когда φ не является перспективой. Если коника C распадается в объединение двух прямых, то одна из этих прямых проходит через все точки q_i , а другая — через p_1 и p_2 . Тем самым, точки q_i коллинеарны, и гомография φ действует так, как показано на [рис. 18.8](#). В частности, она переводит прямую $(p_1 p_2)$ в себя, т. е. является перспективой. \square

18.3. Двойное отношение. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ со стандартными однородными координатами $(x_0 : x_1)$ и стандартную аффинную карту U_1 на ней с координатой $x = x_0 / x_1$. Разность аффинных координат $a = a_0 / a_1$ и $b = b_0 / b_1$ любых двух точек, лежащих в карте U_1 , с точностью до ненулевого множителя совпадает с определителем однородных координат $(a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ этих же точек, поскольку

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1}. \quad (18-3)$$

Для упорядоченной четвёрки различных точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$ число

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)} \quad (18-4)$$

называется *двойным отношением*¹ этих четырёх точек. Как мы видели в [прим. 18.3](#) на стр. 223, оно равно аффинной координате образа точки p_4 при единственной гомографии, переводящей точки p_1, p_2, p_3 в $\infty, 0, 1$ с сохранением порядка. Тем самым, двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме $\infty, 0$ и 1 .

Предложение 18.3

Две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую гомографией, когда их двойные отношения одинаковы.

Доказательство. Пусть гомографии φ_p и φ_q переводят упорядоченные тройки точек p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 в тройку $\infty, 0, 1$. Если $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$, то $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и гомография $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 . Наоборот, если существует гомография ψ , переводящая p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 , то гомография $\varphi_p \circ \psi^{-1}$ переводит четвёрку q_1, q_2, q_3, q_4 в четвёрку $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$. \square

Следствие 18.3

Правая часть равенства (18-4) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть, содержащая разности аффинных координат точек, не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней, при условии, что эта карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны.

¹По-английски *cross-ratio*.

Доказательство. Поскольку замена однородных координат является гомографией, первое утверждение следует из [предл. 18.3](#). Второе утверждение является следствием первого. \square

УПРАЖНЕНИЕ 18.6. Докажите [сл. 18.3](#) прямым вычислением и убедитесь, что в аффинной карте с нулём в b и бесконечностью в a для точек $c = b + \gamma a$ и $d = b + \delta a$ с аффинными координатами $\gamma, \delta \in \mathbb{k}$ двойное отношение $[a, b, c, d] = \delta/\gamma$.

Предложение 18.4

Биекция $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_1$ является гомографией если и только если она сохраняет двойные отношения.

Доказательство. Пусть φ переводит точки a, b и c в $\infty, 0$ и 1 . Если φ сохраняет двойные отношения, то каждая точка $t \in \mathbb{P}_1 \setminus \{a, b, c\}$ переходит в точку

$$\varphi(t) = [a, b, c, t] = \frac{(t-b)(c-a)}{(t-a)(c-b)}.$$

Таким образом, преобразование φ дробно линейно. \square

УПРАЖНЕНИЕ 18.7. Убедитесь, что подгруппа Клейна¹ $V_4 \subset S_4$ сохраняет двойное отношение:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1].$$

18.3.1. Специальные четвёрки точек. Из [упр. 18.7](#) и [прим. 18.2](#) на стр. 222 вытекает, что при перестановках точек p_i двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ может принимать самое большее 6 различных значений, и все их можно получить при помощи шести перестановок первых трёх точек. Пусть

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = t. \quad (18-5)$$

Это аффинная координата образа точки p_4 при гомографии $\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$. Значение $[p_2, p_1, p_3, p_4]$ равно координате образа точки p_4 под действием композиции

$$(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1),$$

вторая стрелка которой действует по правилу $t \mapsto 1/t$. Тем самым,

$$[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/t \quad (18-6)$$

Аналогично, $[p_3, p_2, p_1, p_4]$ и $[p_1, p_3, p_2, p_4]$ суть образы p_4 под действием композиций

$$(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty) \quad \text{и} \quad (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0),$$

вторые стрелки в которых суть $t \mapsto t/(t-1)$ и $t \mapsto 1-t$. Поэтому

$$\begin{aligned} [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = t/(t-1) \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] &= [p_3, p_1, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_3, p_1] = 1-t. \end{aligned} \quad (18-7)$$

¹См. [прим. 18.2](#) на стр. 222.

Значения $[p_2, p_3, p_1, p_4]$ и $[p_3, p_1, p_2, p_4]$ получаются из $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ применением гомографий $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$, задаваемых правилами $t \mapsto (t-1)/t$ и $t \mapsto 1/(1-t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (t-1)/t \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_3, p_1] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1-t). \end{aligned} \quad (18-8)$$

Формулы (18-5)-(18-8) описывают все возможные значения двойного отношения, возникающие при 24 перестановках точек p_1, p_2, p_3, p_4 . Если $t \in \mathbb{k}$ таково, что все шесть значений

$$t, \quad 1/t, \quad t/(t-1), \quad 1-t, \quad (t-1)/t, \quad 1/(1-t) \quad (18-9)$$

различны, то никакую перестановку точек p_i кроме четырёх перестановок из группы Клейна невозможно осуществить дробно линейным преобразованием проективной прямой. Такие четвёрки точек называются *общими*.

При значениях $t = -1, 2, 1/2$, которые, соответственно, удовлетворяют равенствам $t = 1/t$, $t = t/(t-1)$, $t = 1-t$, двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4] = t$ не меняется, соответственно, при транспозициях¹ (1, 2), (1, 3), (1, 4) и пробегает при всевозможных перестановках точек всего три различных значения. Если t является корнем уравнения² $t^2 - t + 1 = 0$, то $t = (t-1)/t$ и $t = 1/(1-t)$, а двойное отношение не меняется при всех циклических перестановках точек p_1, p_2, p_3 , принимая всего два различных значения при произвольных перестановках точек.

Четвёрка точек с двойным отношением, равным одному из пяти только что перечисленных специальных значений, называется *специальной*. Таким образом, при перестановках точек, образующих специальную четвёрку, двойное отношение принимает либо три, либо два различных значения. Геометрически, специальность четвёрки точек означает существование гомографии, осуществляющей перестановку этих точек, отличную от четырёх клейновских перестановок.

18.3.2. Гармонические пары точек. Четвёрка точек $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{P}_1$ называется *гармонической*, если двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$. Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка a является бесконечностью, точка b является центром тяжести точек c и d . При его выполнении говорят также, что пары точек $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ *гармоничны* по отношению друг к другу. Выше мы видели, что гармоничность двух пар точек равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар³. Так как двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой как единого целого, гармоничность является симметричным бинарным отношением на множестве неупорядоченных пар точек на \mathbb{P}_1 .

Пример 18.4 (гармонические пары прямых в четырёхвершиннике, продолжение **прим. 18.2**)

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в вершинах x, y, z треугольника, ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$, пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника xuz , см. **рис. 18◊10** на стр. 232. Для этого отождествим пучок прямых с центром в x с прямой (ad) и с прямой (bc) как в **упр. 18.2** на стр. 224. Мы должны проверить, что прямая (xu) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x' и x'' , что $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$. Поскольку центральные проекции из x и из y задают гомографии между

¹А также остальных восьми перестановках из подгруппы, порождённой такой транспозицией и четырьмя клейновскими перестановками.

²Т.е. является отличным от -1 кубическим корнем из -1 в поле \mathbb{k} .

³См. формулу (18-6) на стр. 230.

прямыми (ad) и (bc) , мы имеем равенства $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$. Так как при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1 .

18.3.3. Двойное отношение на невырожденной конике. Есть несколько разумных способов определить двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$ четырёх точек p_1, p_2, p_3, p_4 на невырожденной конике $C \subset \mathbb{P}_2$. Можно выбрать пятую точку $p_5 \in C$, отличную от четырёх данных, и положить $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$ равным двойному отношению четырёх прямых $(p_5 p_i)$, $1 \leq i \leq 4$, в пучке $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ всех прямых, проходящих через точку p_5 , или двойному отношению проекций точек p_1, p_2, p_3, p_4 из точки p_5 на какую-нибудь прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$. А можно, как в [прим. 17.10](#) на стр. 219, изоморфно отобразить содержащую конику плоскость \mathbb{P}_2 на плоскость $\mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$ неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ так, чтобы коника C биективно отобразилась на состоящую из двойных точек конику Веронезе $C_2 = \{a^2 \in S^2 \mathbb{k}^2 \mid a \in U\}$. Если точки $p_i \in C$ переходят при этом в квадраты $a_i^2 \in C_2$ точек $a_i \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$, мы полагаем $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C = [a_1, a_2, a_3, a_4]$. Покажем, что все эти способы корректны¹ и дают одинаковый результат, предполагая для простоты, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль², чтобы можно было применять [теор. 18.2](#) на стр. 223.

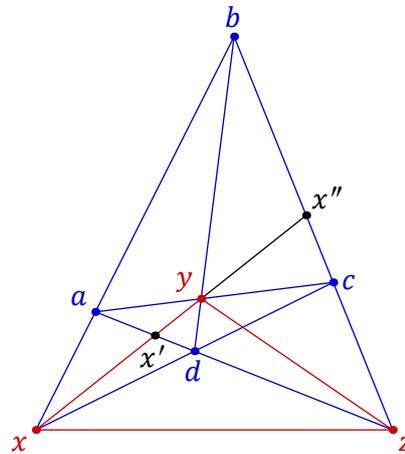


Рис. 18.10.

Прямые, проходящие через фиксированную точку $p_5 \in \mathbb{P}_2$, образуют прямую $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, и для любой прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$ отображение $p_5^\times \rightarrow \ell$, переводящее прямую из пучка p_5^\times в точку её пересечения с прямой ℓ , является гомографией по [упр. 18.2](#) на стр. 224. Поскольку гомографии сохраняют двойное отношение, двойное отношение прямых $(p_5 p_i)$ в пучке p_5^\times равно двойному отношению проекций точек p_i из точки p_5 на любую прямую ℓ . В частности, последнее одинаково для всех прямых ℓ , не проходящих через точку p_5 .

Для любых двух точек $a, b \in C$ и не проходящей через них прямой ℓ композиция проекции прямой ℓ на конику C из точки a и проекции коники C обратно на прямую ℓ из точки b биективна и в однородных координатах на прямой ℓ задаётся рациональными функциями согласно форм. (17-9) на стр. 214. По [теор. 18.2](#) эта композиция является гомографией и сохраняет двойные отношения. Таким образом, двойное отношение проекций точек p_i на прямую из точки $p_5 \in C$ не зависит от выбора точки p_5 .

Поскольку композиция вложения Веронезе $v_2 : \mathbb{P}(\mathbb{k}^2) \rightarrow \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$, $a \mapsto a^2$, с проекцией коники Веронезе $C_2 = \text{im } v_2$ из любой точки $a^2 \in C_2$ на любую прямую $\ell \subset \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$ биективна и задаётся в координатах рациональными функциями, она тоже является гомографией и сохраняет двойные отношения. Поэтому для коники Веронезе двойное отношение проекций любых четырёх двойных точек $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2 \in C_2$ на любую прямую $\ell \subset \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$ из любой точки на C_2 совпадает с двойным отношением $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ самих точек a_i на прямой $\mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$.

¹Т. е. не зависят ни от выбора точки $p_5 \in C \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, ни от выбора прямой ℓ , на которую проектируются точки p_i , ни от выбора линейного проективного изоморфизма данной коники C с коникой Веронезе C_2 .

²В действительности, это верно для непустой неособой коники над любым полем характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

Наконец, пусть заданы два линейных проективных изоморфизма $\varphi, \psi : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$, биективно отображающих данную невырожденную конику $C \subset \mathbb{P}_2$ на конику Веронезе и переводящих точки $p_i \in C$ в точки $a_i^2 = \varphi(p_i)$ и $b_i^2 = \psi(p_i)$. Композиция $\eta = \varphi \circ \psi^{-1}$ является линейным проективным автоморфизмом пространства $\mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$ и переводит конику Веронезе в себя. Ограничение автоморфизма η на любую прямую ℓ является гомографией между прямыми ℓ и $\eta(\ell)$ и сохраняет двойные отношения. Если точки $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \ell$ являются образами точек $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2 \in C_2$ при проекции из точки $c^2 \in C_2$, то их образы $\eta(q_i)$ суть образы точек $a_i^2 = \eta(a_i^2)$ при проекции из точки $\eta(c^2)$ на прямую $\eta(\ell)$. Поскольку двойное отношение точек q_i такое же, как и у точек $\eta(q_i)$, вычисленные любым из трёх описанных выше способов двойные отношения точек a_i^2 и точек b_i^2 на конике Веронезе тоже будут одинаковы.

Предложение 18.5

Гладкая коника C , проходящая через пять точек p_1, \dots, p_5 , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ p , таких что в пучке прямых с центром в p двойное отношение четырёх прямых (p, p_i) , $1 \leq i \leq 4$, равно двойному отношению четырёх прямых (p_5, p_i) , $1 \leq i \leq 4$, в пучке прямых с центром в точке p_5 .

Доказательство. Мы уже видели выше, что все точки $p \in C$ обладают требуемым свойством. Для любой другой точки p , обладающей этим свойством, обозначим через Q конику, проходящую через точки p, p_1, p_2, p_3 и p_5 . Гомография¹ $Q : p^\times \rightarrow p_5^\times, \forall q \in Q (pq) \mapsto (p_5q)$, между пучками прямых с центрами в p и p_5 переводит прямые (pp_i) в прямые (p_5p_i) для $1 \leq i \leq 3$. Поскольку $[(p, p_1), (p, p_2), (p, p_3), (p, p_4)] = [(p_5, p_1), (p_5, p_2), (p_5, p_3), (p_5, p_4)]$, прямая (pp_4) переходит в прямую (p_5p_4) , откуда $p_4 \in Q$. Но единственная коника, проходящая через пять точек p_1, \dots, p_5 , это коника C . Поэтому $Q = C$ и $p \in C$. \square

18.4. Гомографии на непустой гладкой конике. Биективное преобразование $\varphi : C \xrightarrow{\sim} C$ невырожденной коники C называется *гомографией*, если оно сохраняет двойные отношения. Согласно [предл. 18.4](#) на стр. 230 это требование равносильно тому, что для некоторой сохраняющей двойные отношения биекции $\psi : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ преобразование $\psi\varphi\psi^{-1} : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ является гомографией на \mathbb{P}_1 . Если это условие выполняется для какой-нибудь сохраняющей двойные отношения биекции между C и \mathbb{P}_1 , то по тому же [предл. 18.4](#) оно выполняется для любых таких биекций.

Как и гомография на прямой, гомография на конике однозначно определяется своим действием на какие-нибудь три различные точки.

Пример 18.5 (инволюции)

Гомография $\sigma : C \rightarrow C$ называется *инволюцией*, если она обратна самой себе, т. е. $\sigma^2 = \text{Id}_C$. Тожественная инволюция $\sigma = \text{Id}_C$ называется *тривиальной*. Пусть точки a_1, a_2, b_1, b_2 на конике C различны и инволюция $\sigma : C \rightarrow C$ переставляет одноимённые точки $a_1 \leftrightarrow a_2$ и $b_1 \leftrightarrow b_2$, как на [рис. 18.11](#) на стр. 234. Обозначим точку пересечения прямых (a_1a_2) и (b_1b_2) через s . Пучок прямых с центром в s задаёт биективное преобразование $\sigma_s : C \xrightarrow{\sim} C$, переставляющее точки пересечения коники C с каждой проходящей через s прямой.

Упражнение 18.8. Убедитесь, что это преобразование рационально.

Следовательно, σ_s является гомографией, а значит, совпадает с инволюцией σ , поскольку действует на четыре точки a_1, a_2, b_1, b_2 также, как и σ . В частности, неподвижными точками инволюции σ являются две точки, образующие видимый из точки s контур коники C .

¹См. [предл. 18.2](#) на стр. 228.

Мы заключаем, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ каждая нетривиальная инволюция на проективной прямой или на невырожденной конике имеет ровно две различные неподвижные точки, и для любой пары различных точек $c, d \in \mathbb{P}_1$ существует единственная инволюция $\sigma_{cd} : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$, для которой точки c и d являются неподвижными. Эта инволюция тогда и только тогда переставляет друг с другом точки a, b , когда точки a^2 и b^2 коники Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ лежат на одной прямой с точкой $cd \in \mathbb{P}_2$.

Упражнение 18.9. Убедитесь, что для четырёх различных точек a, b, c, d равенство $\sigma_{cd}(a) = b$ равносильно гармоничности точек a, b точкам c, d , и что в аффинной карте, где $d = \infty$, инволюция σ_{cd} выглядит как центральная симметрия относительно c .

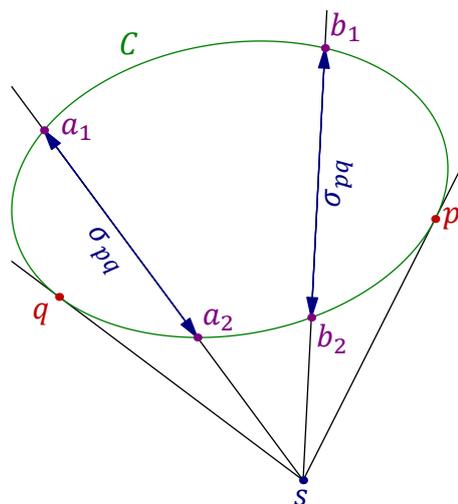


Рис. 18◊11. Инволюция на конике.

Следствие 18.4

Над алгебраически замкнутым полем для любых двух различных нетривиальных инволюций $\sigma, \tau : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ имеется ровно одна такая пара (возможно, совпадающих друг с другом) точек $a, b \in \mathbb{P}_1$, что $\sigma(a) = b$ и $\tau(a) = b$.

Доказательство. Пусть точки u, w на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ неподвижны относительно инволюции σ , а точки r, s — относительно инволюции τ . Точки a, b тогда и только тогда удовлетворяют условиям $\sigma(a) = b$ и $\tau(a) = b$, когда точки a^2 и b^2 коники Веронезе на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$ лежат на одной прямой с точками uw и rs . Но прямая (uw, rs) пересекает конику Веронезе ровно по двум, возможно совпадающим, точкам. □

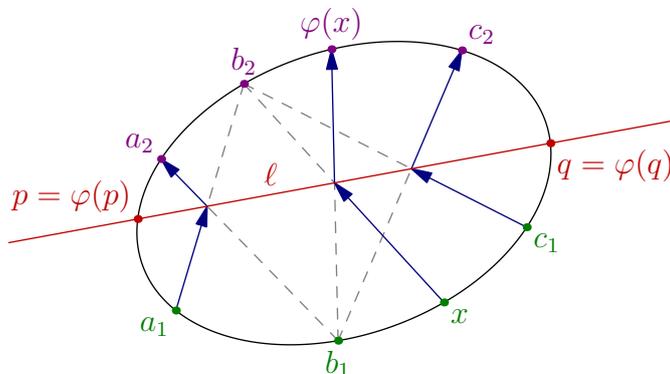


Рис. 18◊12. Перекрёстная ось гомографии на конике.

Пример 18.6 (перекрёстная ось гомографии на конике)

Гомография $\varphi : C \rightarrow C$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in C$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in C$ является композицией проекций $b_2 : C \rightarrow \ell$ и $b_1 : \ell \rightarrow C$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения $(a_1 b_2) \cap (b_1 a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1 c_2)$ пар перекрёстных прямых на рис. 18◊12. Поскольку неподвижные точки гомографии φ суть точки пересечения $\ell \cap C$, прямая ℓ не зависит от выбора точек $a_1, b_1, c_1 \in C$, а φ имеет либо ровно две неподвижные точки, либо ровно одну, причём последнее означает, что прямая ℓ касается коники C в этой неподвижной точке. Таким образом,

прямая ℓ представляет собой ГМТ пересечения всех перекрестных прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегает конику C . Отсюда получается ещё одно доказательство теоремы Паскаля¹: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в C шестиугольника $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, будучи точками пересечений перекрестных прямых гомографии, которая переводит точки a_1, b_1, c_1 в точки a_2, b_2, c_2 , лежат на перекрестной оси ℓ этой гомографии.

Перекрестная ось гомографии $\varphi : C \rightarrow C$ легко строится одной линейкой, если известно действие φ на какие-нибудь три точки. Это позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(z)$ любой точки $z \in C$, а также указать неподвижные точки гомографии φ . В частности, две касательные к невырожденной конике $C \subset \mathbb{P}_2$, опущенные из заданной точки $s \in \mathbb{P}_2$, тоже можно построить одной линейкой, найдя неподвижные точки инволюции $\sigma_s : C \rightarrow C$, задаваемой пучком прямых с центром в s , см. рис. 18◊13. Более простое построение можно извлечь из идущего ниже упр. 18.10.

УПРАЖНЕНИЕ 18.10 (ПОСТРОЕНИЕ ШТЕЙНЕРА). Обоснуйте показанное на рис. 18◊14 построение² одной линейкой поляр³ $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C .

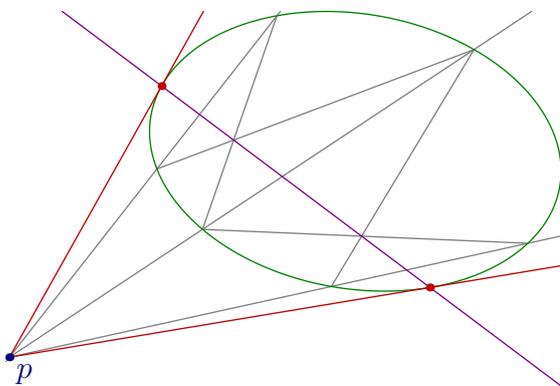


Рис. 18◊13. Построение касательных.

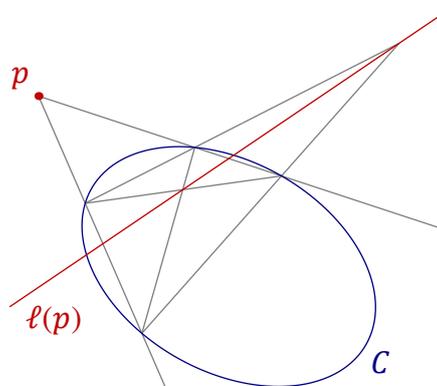


Рис. 18◊14. Построение поляр³.

¹См. теор. 18.3 на стр. 227.

²Принадлежащее Якобу Штейнеру (1796 – 1863), см. Я. Штейнер. «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга», Харьковская математическая библиотека, Харьков, 1910.

³См. формулу (17-4) на стр. 212.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 18.2. Биjectивность очевидна. Докажем линейность. Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$ аннулируется линейной формой $\xi \in \mathbb{P}_2^\times$, и $a, b \in L$ — две различные точки. Точка $\ell \cap L = (ab) \cap \text{Ann } \xi = \xi(b) \cdot a - \xi(a) \cdot b$ линейно зависит от ξ .

Упр. 18.3. Соединяя точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$, получаем перекрёстную ось ℓ . Точка $\varphi(x)$ является пересечением прямой ℓ_2 с прямой, соединяющей точки b_1 и $\ell \cap (x, b_2)$.

Упр. 18.4. Строим точку o пересечения прямой, проходящей через точки $\ell'_1 \cap \ell''_2, \ell'_2 \cap \ell''_1$, и прямой, проходящей через точки $\ell'_2 \cap \ell''_3, \ell'_3 \cap \ell''_2$. Поскольку o является перекрёстным центром гомографии φ , прямая $\varphi(\ell)$ проходит через p_2 и точку пересечения прямой ℓ'_1 с прямой, проходящей через o и точку $\ell \cap \ell''_1$.

Упр. 18.5. Рассмотрите произвольную прямую L , не проходящую через p_1 и p_2 , и убедитесь, что отображение $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ является композицией гомографии $\pi_1 : p_1^\times \xrightarrow{\simeq} L, \ell \mapsto \ell \cap L$ из упр. 18.2 на стр. 224, гомографии $C_{p_2 p_1} : L \xrightarrow{\simeq} L$ из лем. 18.2 на стр. 226 (где надо положить $\ell_1 = \ell_1 = L$) и обратной к гомографии из упр. 18.2 гомографии $\pi_2^{-1} : L \xrightarrow{\simeq} p_2^\times$.

Упр. 18.6. При замене однородных координат все определители в правой части формулы (18-4) умножаются на определитель матрицы замены координат, что не меняет правой дроби. Средняя дробь всегда равна правой в силу вычисления (18-3). Последнее утверждение проверяется выкладкой

$$\frac{\det(a, c)}{\det(a, d)} \cdot \frac{\det(b, d)}{\det(b, c)} = \frac{\det(a, b + \gamma a)}{\det(a, b + \delta a)} \cdot \frac{\det(b, b + \delta a)}{\det(b, b + \gamma a)} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Упр. 18.8. Преобразование, переставляющее изотропные точки на проходящей через s прямой, представляет собою отражение σ_s в ортогональной к анизотропному вектору $s \notin C$ гиперплоскости s^\perp , ср. с прим. 17.7 на стр. 214.

Упр. 18.9. Поскольку $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$, двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$. Наоборот, если $[a, b, c, d] = -1$, то отображение, переводящее точку $x \in \ell$ в единственную такую точку $y \in \ell$, что $[x, y, c, d] = -1$, является инволютивной гомографией и действует на a, b, c, d точно также, как инволюция $\sigma_{c,d}$.

Упр. 18.10. Пусть коника C задаётся квадратичной формой q и две проходящие через p прямые на рис. 18♦14 пересекают её в точках a, b, c, d , где $a \in (pb)$ и $d \in (pc)$ суть ближайшие к p точки этих прямых. Обозначим отличные от p вершины ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$ треугольника prs через $r = (ac) \cap (bd)$, $s = (ad) \cap (bc)$ и положим $u \stackrel{\text{def}}{=} (sr) \cap (ab)$, $w \stackrel{\text{def}}{=} (sr) \cap (cd)$. Коника C задаёт на прямой (ab) инволюцию, переставляющую друг с другом ортогональные точки: $x \leftrightarrow y \iff \tilde{q}(x, y) = 0$. Как неподвижными точками этой инволюции являются a и b , она совпадает с инволюцией σ_{ab} . По прим. 18.4 на стр. 231 точки p, u гармоничны точкам a, b . По упр. 18.9 на стр. 234 $\sigma_{ab}(s) = u$, откуда $\tilde{q}(p, u) = 0$. Рассматривая аналогичную инволюцию на прямой (cd) , точно также заключаем, что $(p, w) = 0$. Тем самым, прямая $(uw) = (sr) = \mathbb{P}(p^\perp)$ является полярой точки p .