

§17. Проективная геометрия

17.1. Проективные пространства. С каждым $(n + 1)$ -мерным векторным пространством V над произвольным полем \mathbb{k} помимо $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано n -мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в V или, что то же самое, проходящие через нуль аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы наблюдать их как «обычные точки», внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую нуля аффинную гиперплоскость, как на рис. 17◊1. Каждая такая гиперплоскость однозначно задаётся неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — ненулевая линейная форма на V , и называется аффинной картой U_ξ на $\mathbb{P}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$, на которых $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств, лежащих в параллельном экрану U_ξ векторном подпространстве $\text{Ann } \xi \subset V$ размерности n . Таким образом, невидимые в карте U_ξ точки n -мерного проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образуют $(n - 1)$ -мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$. Оно называется бесконечно удалённой гиперплоскостью карты U_ξ . Точки $\mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$ можно воспринимать как направления в аффинной карте U_ξ .

Из сказанного вытекает, что n -мерное проективное пространство \mathbb{P}_n разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех размерностей от 0 до n :

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0,$$

где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ это одна точка.

УПРАЖНЕНИЕ 17.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек в левой и правой части этого равенства над конечным полем из q элементов?

17.1.1. Глобальные однородные координаты. Зафиксируем в V координаты x_0, x_1, \dots, x_n относительно какого-нибудь базиса e_0, e_1, \dots, e_n . Два ненулевых вектора

$$v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$ если и только если их координаты пропорциональны. Последнее равносильно равенству отношений¹ $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leq \mu \neq \nu \leq n$.

¹При этом равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$, в которых x и y либо одновременно отличны от нуля, либо одновременно нулевые, тоже допускаются и считаются истинными.

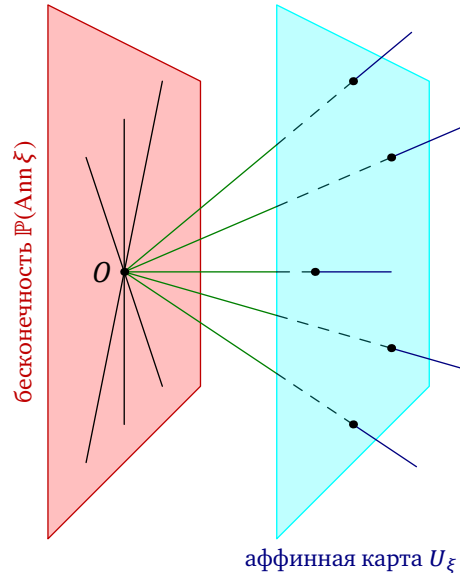


Рис. 17◊1. Проективный мир.

Иначе говоря, с точкой $p \in \mathbb{P}_n$ взаимно однозначно связаны не координаты ненулевого вектора, задающего эту точку, а только отношения $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе e_0, e_1, \dots, e_n .

17.1.2. Локальные аффинные координаты. Любой набор ковекторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^*$, дополняющий ковектор ξ до базиса в V^* , задаёт в аффинной карте U_ξ аффинную систему координат с началом в точке e_0 и базисными векторами e_1, e_2, \dots, e_n , где e_0, e_1, \dots, e_n это двойственный к $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ базис пространства V .

УПРАЖНЕНИЕ 17.3. Убедитесь, что $e_0 \in U_\xi$, а e_1, e_2, \dots, e_n составляют базис в $\text{Ann } \xi$.

Каждое наблюдаемое в карте U_ξ одномерное подпространство, порождённое ненулевым вектором $v \in V$, изображается в нём точкой $v/\xi(v) \in U_\xi$ с аффинными координатами

$$t_i = \xi_i(v/\xi(v)) = \xi_i(v)/\xi(v), \quad \text{где } 1 \leq i \leq n.$$

Обратите внимание, что локальные аффинные координаты точки $v \in \mathbb{P}(V)$ являются не линейными, а дробно линейными функциями от глобальных однородных координат этой точки.

Пример 17.1 (Проективная прямая)

Проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{k}) = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ целиком покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, которые представляют собою прямые $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ в аффинном пространстве \mathbb{k}^2 , см. рис. 17◊2.

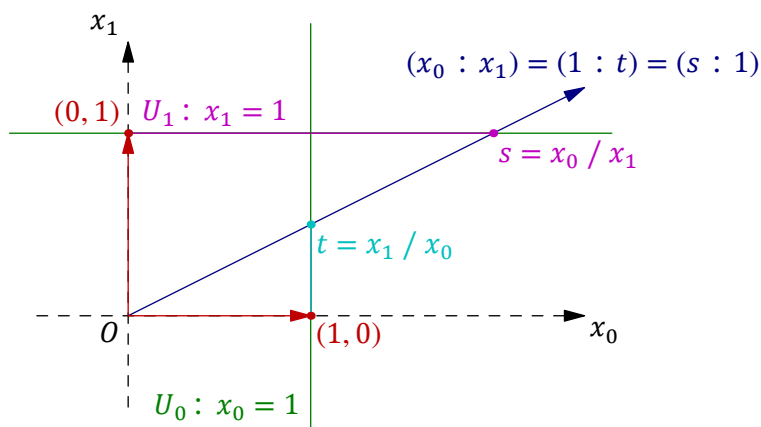


Рис. 17◊2. Стандартные карты на \mathbb{P}_1 .

В карте U_0 видны все одномерные подпространства в \mathbb{k}^2 кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой этой карты. В качестве локальной аффинной координаты на U_0 годится функция $t = x_1/x_0$. В карте U_1 видны все точки $(x_0 : x_1) = (\frac{x_0}{x_1} : 1)$, у которых $x_1 \neq 0$, и в качестве локальной аффинной координаты в этой карте можно взять функцию $t = x_0/x_1$. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $t = 1/s$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.4. Убедитесь в этом.

Таким образом, проективная прямая $\mathbb{P}_1(\mathbb{k})$ является результатом склейки двух аффинных прямых $\mathbb{A}^1 = \mathbb{k}$ с координатами s и t вдоль дополнения до начал координат по правилу: точка с координатой s на первой прямой отождествляется с точкой с координатой $t = 1/s$ на второй.

Если основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, результат такой склейки можно представлять себе как окружность диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных прямых, каждая из которых проектируется на окружность из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания, см. рис. 17◊3.

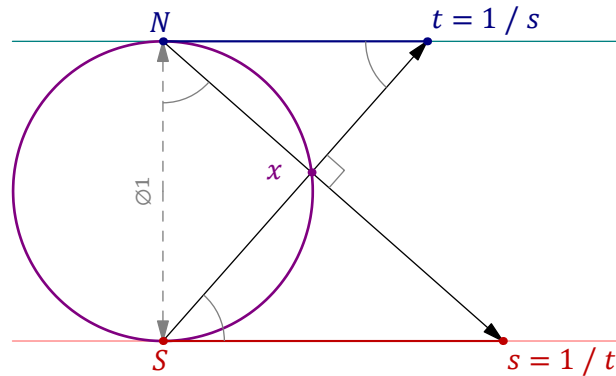


Рис. 17◊3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

Из подобия прямоугольных треугольников NSs и tNS на рис. 17◊3 вытекает, что точка с координатой s на верхней касательной и точка с координатой t на нижней проектируются в одну и ту же точку x окружности если и только если $t = 1/s$. Получаемое таким образом отождествление «пополненной числовой прямой» $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \sqcup \infty$ с окружностью хорошо согласуется с принятыми в вещественном анализе представлениями о бесконечности: уходу координаты t на бесконечность по верхней числовой прямой отвечает стремление к нулю координаты $s = 1/t$ на нижней, и сжимающиеся ε -окрестности точки S на окружности выглядят на верхней числовой прямой как дополнения до неограниченно увеличивающихся отрезков $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$, используемые в анализе как «окрестности бесконечности».

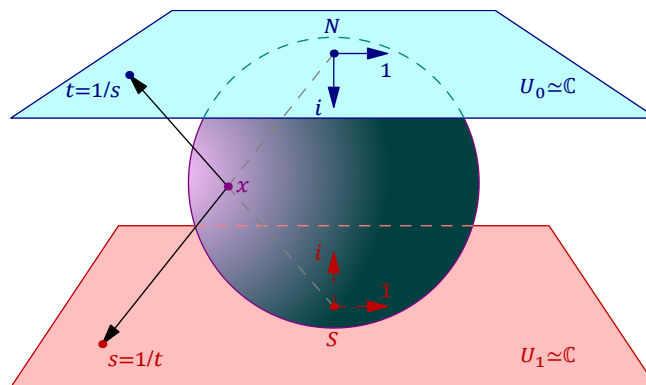


Рис. 17◊4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

При $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ результат склейки двух аффинных прямых $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ вдоль дополнений до нуля по правилу $t \leftrightarrow 1/t$ можно воспринимать как сферу диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных плоскостей, каждая из которых стереографически проектируется на сферу из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания со сферой, см. рис. 17◊4. Если за начала отсчёта в каждой из плоскостей принять точку касания, а векторы

1, $i \in \mathbb{C}$ направить так¹, как на рис. 17◊4, то комплексные числа s и t из разных плоскостей спроектируются в одну и ту же точку P сферы если и только если² $\text{Arg } s = -\text{Arg } t$ и $|s| = 1/|t|$, т. е. когда $s = 1/t$ в \mathbb{C} . По этой причине комплексную проективную прямую $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ часто называют *сферой Римана*, а также *полненной комплексной плоскостью*.

ПРИМЕР 17.2 (вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$)

Как топологическое пространство, вещественная проективная плоскость допускает следующее наглядное описание. Каждая проходящая через начало координат прямая в \mathbb{R}^3 пересекает единичную замкнутую полусферу $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, x_0 \geq 0$. При этом любая не лежащая в плоскости $x_0 = 0$ прямая пересекает полусферу ровно в одной внутренней точке, а каждая прямая из плоскости $x_0 = 0$ — в двух диаметрально противоположных точках границы. Таким образом, топологическое пространство $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ гомеоморфно³ полусфере, у которой склеены диаметрально противоположные точки границы. Поскольку полусфера гомеоморфна квадрату, то же пространство получится при склейке противоположных сторон квадрата с обращением их ориентации, как на рис. 17◊5.

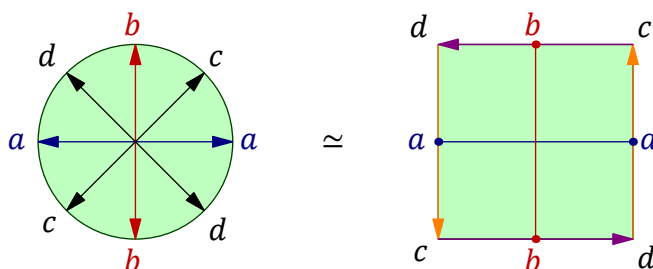


Рис. 17◊5. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это квадрат со склеенными противоположными точками границы.

Результат такой склейки иначе можно описать как ленту Мёбиуса, к граничной окружности которой приклеен — по своей граничной окружности — диск, см. рис. 17◊6.

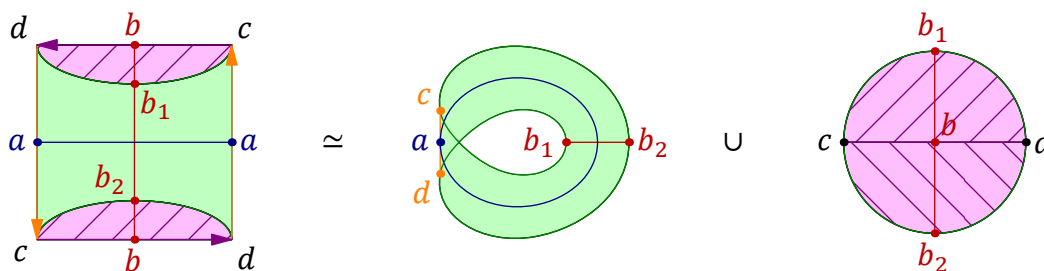


Рис. 17◊6. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей.

¹Обратите внимание, что ориентации плоскостей при этом согласованы в том смысле, что одну из них можно непрерывным перекачиванием по поверхности сферы совместить с другой так, что ориентации будут одинаковыми.

²Первое очевидно из рис. 17◊4, второе — из рассмотрения сечения сферы плоскостью NxS , которое изображено на рис. 17◊3 выше.

³Биективное отображение между топологическими пространствами называется *гомеоморфизмом*, если и оно, и обратное к нему отображения оба непрерывны.

Обратите внимание, что красный вертикальный и синий горизонтальный отрезки квадрата превращаются при склейке в две петли¹ на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, которые пересекаются по одной точке, причём при малых шевелениях этих петель они по-прежнему будут пересекаться в одной точке. Это означает, что ни одну из них нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.5. Убедитесь, что устойчивое к малым шевелениям количество точек пересечения непрерывно стягиваемой в точку петли с любой другой петлёй чётно.

При этом, если петлю a , т. е. экватор ленты Мёбиуса, пройти в одном направлении дважды, то возникающая таким образом «удвоенная петля» непрерывно деформируется в границу ленты Мёбиуса, а значит, может быть стянута внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в точку по приклеенному к границе ленты Мёбиуса диску. Таким образом, на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ есть нестягиваемая петля, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 17.3 (вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$)

Каждая собственная линейная изометрия трёхмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 является поворотом вокруг некоторой прямой. Изобразим поворот вокруг прямой с направляющим вектором e единичной длины на угол $\varphi \in [0, \pi]$, если смотреть вдоль вектора e , точкой² $\varphi \cdot e \in \mathbb{R}^3$. В результате все повороты на углы, меньшие π , изобразятся внутренними точками шара радиуса π с центром в нуле. Диаметрально противоположным точкам ограничивающей этот шар сферы отвечает одна и та же изометрия — поворот на угол π вокруг соединяющей эти точки прямой³. Таким образом собственная ортогональная группа $SO_3(\mathbb{R})$ евклидова пространства \mathbb{R}^3 гомеоморфна трёхмерному шару со склеенными диаметрально противоположными точками ограничивающей этот шар сферы. С другой стороны, конструкция из предыдущего прим. 17.2, применённая к пространству \mathbb{R}^4 , показывает, что вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ допускает точно такое же описание: каждая проходящая через начало координат прямая в \mathbb{R}^4 пересекает единичную замкнутую полусферу

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_0 \geq 0,$$

и все не лежащие в гиперплоскости $x_0 = 0$ прямые пересекают её в единственной внутренней точке, а прямые из гиперплоскости $x_0 = 0$ — по двум диаметрально противоположным точкам граничной трёхмерной сферы $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$. Остаётся заметить, что полусфера в \mathbb{R}^4 гомеоморфна шару в \mathbb{R}^3 .

УПРАЖНЕНИЕ 17.6. Убедитесь, что семейство вращений вокруг фиксированной оси в фиксированном направлении на непрерывно меняющийся от 0 до 2π угол образует в пространстве $SO_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ нестягиваемую петлю, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 17.4 (СТАНДАРТНЫЕ АФФИННЫЕ КАРТЫ НА \mathbb{P}_n)

Набор из $(n + 1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в \mathbb{A}^{n+1} уравнениями $x_\nu = 1$, называется *стандартным аффинным покрытием* проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на карте U_ν берутся n линейных форм $t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = x_i/x_\nu$, где $0 \leq i \leq n$ и $i \neq \nu$. Таким образом, пространство \mathbb{P}_n

¹Т. е. в замкнутые кривые, являющиеся непрерывными образами окружности.

²Т. е. концом вектора длины $\varphi \in [0, \pi]$ с \mathbb{R} , отложенного в направлении единичного вектора e .

³Он виден как поворот на угол π независимо от того направления на оси, вдоль которого Вы его наблюдаете.

можно представлять себе как результат склейки $(n + 1)$ различных копий U_0, U_1, \dots, U_n аффинного пространства \mathbb{A}^n по их фактическим пересечениям внутри \mathbb{P}^n . В однородных координатах на \mathbb{P}^n пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ описывается как множество всех таких $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на картах U_μ и U_ν это множество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$ если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)} / t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

Пример 17.5 (Аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C , заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$. В стандартной

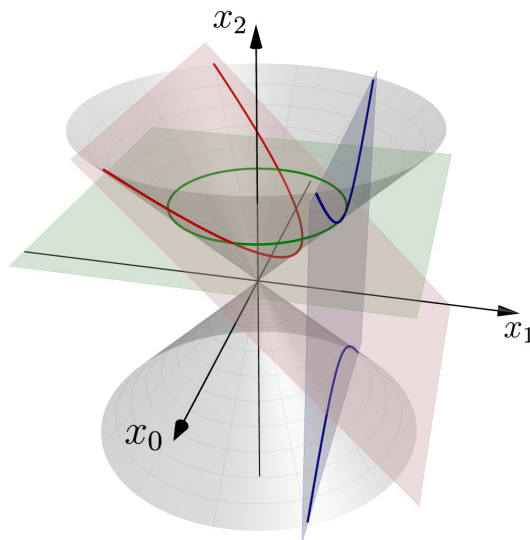


Рис. 17◊7. Аффинные изображения проективной коники.

карте U_1 , где $x_1 = 1$, в локальных координатах $t_0 = x_0/x_1$ и $t_2 = x_2/x_1$ это уравнение превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_2 , где $x_2 = 1$, в локальных координатах $t_0 = x_0/x_2$, $t_1 = x_1/x_2$ — в уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В нестандартной карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1 + x_2 = 1$, в локальных координатах $t = x_0/(x_1 + x_2)$ и $s = (x_2 - x_1)/(x_2 + x_1)$ после переноса x_1^2 из левой части направо и деления обеих частей на $x_2 + x_1$ наше однородное уравнение превратится в уравнение параболы $t^2 = u$. Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ в различных аффинных картах. Вид кривой C в карте $U_\xi \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая $\xi(x) = 0$ этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответ-

ственно, когда эта прямая не пересекается с C , касается C и пересекается с C в двух различных точках, см. рис. 17◊7.

17.2. Подпространства. Проективизации $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ векторных подпространств $U \subset V$ называются *проективными подпространствами* в $\mathbb{P}(V)$. Через любые две различные точки a, b в $\mathbb{P}(V)$ проходит единственная проективная прямая (ab) . Она является проективизацией линейной оболочки непропорциональных векторов a, b и состоит из всевозможных ненулевых линейных комбинаций $\lambda a + \mu b$, рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов в разложении вектора $v = \lambda a + \mu b \in (ab)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты точки v на проективной прямой (ab) .

УПРАЖНЕНИЕ 17.7. Убедитесь, что k -мерное проективное подпространство наблюдается в любой задевающей его аффинной карте как k -мерное аффинное подпространство.

Предложение 17.1

Для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}^n$ выполняется неравенство

$$\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $L = \mathbb{P}(U)$, $\mathbb{P}(W)$, где $U, W \subset V$ — векторные подпространства. Тогда $K \cap L = \mathbb{P}(U \cap W)$ имеет размерность $\dim K \cap L = \dim(U \cap W) - 1 \geq \dim U + \dim W - \dim V - 1 = \dim K + 1 + \dim L + 1 - (n + 1) - 1 = \dim K + \dim L - n$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 17.8. Убедитесь, что любые две прямые на \mathbb{P}_2 пересекаются.

17.2.1. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства

$$K = \mathbb{P}(U) \quad \text{и} \quad L = \mathbb{P}(W)$$

в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \emptyset$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в \mathbb{P}_3 дополнительные. На языке линейной алгебры дополнительность проективных подпространств означает, что подлежащие им векторные подпространства $U, W \subset V$ имеют $U \cap W = 0$ и $\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = n + 1 = \dim V$, откуда $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$. Если вектор v не лежит ни в U , ни в W , обе компоненты этого разложения отличны от нуля. Это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная проходящая через p прямая ℓ , пересекающая как K , так и L .

УПРАЖНЕНИЕ 17.9. Убедитесь в этом.

Всякая пара дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ задаёт проекцию из K на L

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \rightarrow L, \quad (17-1)$$

которая тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения подпространства L с той единственной прямой, которая проходит через точку p и пересекает оба подпространства K и L . На языке линейной алгебры, проекция переводит каждый вектор $v = u + w$ с ненулевой компонентой $w \in W$ в эту компоненту. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, согласованных с разложением $V = U \oplus W$ так, что начальный кусок $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$ является координатами в K , а остаток $(x_{m+1} : x_{m+2} : \dots : x_n)$ — координатами в L , проекция π_L^K просто удаляет первые $(m + 1)$ координат x_ν с $0 \leq \nu \leq m$.

17.2.2. Проективная двойственность. Проективизации $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ двойственных друг другу векторных пространств V и V^* называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: соотношение $\varphi(v) = 0$ на вектор $v \in V$ ковектор $\varphi \in V^*$ линейно как по v , так и по φ , и задаёт при фиксированном $\varphi \in \mathbb{P}_n^\times$ гиперплоскость в \mathbb{P}_n , а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в \mathbb{P}_n^\times , состоящую из всех гиперплоскостей в \mathbb{P}_n , проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$. Так как две линейные формы задают одну и ту же гиперплоскость в векторном пространстве если и только если они пропорциональны, гиперплоскости в проективном пространстве биективно соответствуют точкам двойственного проективного пространства.

Напомним¹, что между векторными подпространствами дополнительных размерностей в V и V^* имеется каноническая биекция $U \leftrightarrow \text{Ann}(U)$, которая оборачивает включения и переводит суммы в пересечения, а пересечения — в суммы. На языке проективной геометрии это означает, что множество гиперплоскостей, содержащих заданное m -мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$, представляет собою проективное подпространство $K^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\text{Ann } U) \subset \mathbb{P}_n^\times$ размерности $n - m - 1$, и при каждом $m = 0, 1, \dots, (n - 1)$ соответствие $K \leftrightarrow K^\times$ между m -

¹См. теор. 7.1 на стр. 89.

мерными проективными подпространствами в \mathbb{P}_n и $(n-m-1)$ -мерными проективными подпространствами в \mathbb{P}_n^\times взаимно однозначно и оборачивает включения. Это соответствие называется *проективной двойственностью*. Оно позволяет переговаривать геометрические утверждения в эквивалентные двойственные геометрические утверждения, подчас довольно сильно отличающиеся от исходных.

Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

Поскольку биекция $U \leftrightarrow \text{Ann}(U)$ переводит пересечения векторных пространств в суммы и наоборот, соответствие $K \leftrightarrow K^\times$ переводит пересечение $K \cap L$ проективных подпространств в *линейное соединение*¹ $J(K^\times, L^\times)$ — объединение всех проективных прямых² $(\varphi\psi)$ с $\varphi \in K^\times$, $\psi \in L^\times$. Наоборот, линейное соединение $J(K, L)$ двойственно пересечению $K^\times \cap L^\times$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.10. Убедитесь, что $\mathbb{P}(U + W) = J(\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W))$ в $\mathbb{P}(V)$ для любых ненулевых векторных подпространств $U, W \subset V$.

17.3. Проективные квадрики. Одномерные изотропные подпространства ненулевой квадратичной формы q на векторном пространстве V образуют в $\mathbb{P}(V)$ геометрическую фигуру, которая называется *проективной квадратикой* и обозначается $V(q)$. Квадрика $V(q)$ называется *гладкой* (а также *невырожденной* или *неособой*), если квадратичная форма q невырождена³. В противном случае квадрика называется *особой* или *вырожденной*.

ПРИМЕР 17.6 (квадрики на \mathbb{P}_1 , геометрическая переформулировка ПРИМ. 15.1 на стр. 188)

Если $\dim V = 2$, уравнение $q(x) = 0$ в ортогональном базисе формы q преобразуется либо к виду $x_0^2 = 0$, либо к виду $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$, где $\alpha \neq 0$.

В первом случае форма q вырождена, а квадрика $V(q)$ состоит из единственной точки $p = (0 : 1)$, представляющей одномерное ядро формы q . Поскольку квадратичная форма $q = x_0^2$ является квадратом линейной формы x_0 , аннулирующей точку p , квадрика $V(q)$ называется *двойной точкой* p .

Гладкая квадрика $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух различных точек. Первое равносильно тому, что $-\alpha$ не является квадратом в \mathbb{k} , и над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} такого не бывает. Если же $-\alpha = \delta^2$, то форма $x_0^2 + \alpha x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ зануляется ровно в двух различных точках $(\pm\delta : 1) \in \mathbb{P}_1$.

Различить все перечисленные случаи можно при помощи определителя Грама формы q в произвольном базисе⁴ пространства V . Квадрика представляет собою двойную точку, если её дискриминант $D = -4 \det q$ обращается в нуль, состоит из двух различных точек, если D является ненулевым квадратом, и пуста, когда D не является квадратом.

СЛЕДСТВИЕ 17.1

Квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ может пересекать прямую $\ell \subset \mathbb{P}_n$ ровно одним из следующих четырёх способов: либо $\ell \subset Q$, либо $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, либо $\ell \cap Q$ это две различные точки, либо $\ell \cap Q = \emptyset$, причём над алгебраически замкнутым полем последний случай невозможен. \square

¹Обозначение J является сокращением от английского *join*.

²Здесь и далее удобно считать, что «прямая» (aa) это одна точка a .

³Т. е. её поляризация $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ удовлетворяет условиям ПРЕДЛ. 14.1 на стр. 172.

⁴При умножении формы q на ненулевую константу определитель Грама $\det q = -D/4$ умножается на квадрат этой константы, а коэффициент α в выражении $x_0^2 + \alpha x_1^2$ сравним по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля \mathbb{k} с определителем Грама этой формы в произвольном базисе, ср. с ПРИМ. 15.1 на стр. 188.

17.3.1. Касательные прямые и касательное пространство. Прямая, проходящая через точку p квадрики Q , называется *касательной* к Q в точке p , если она лежит на квадрике Q или пересекает Q по двойной точке p . Объединение всех прямых, касающихся квадрики Q в точке p , обозначается $T_p Q$ и называется *касательным пространством* к Q в точке $p \in Q$.

Таким образом, прямая (ab) является касательной к квадрике $Q = V(q)$ если и только если ограничение квадратичной формы q на линейную оболочку векторов a, b вырождено, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} q(a) & \tilde{q}(a, b) \\ \tilde{q}(a, b) & q(b) \end{pmatrix} = 0, \quad (17-2)$$

где $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ это поляризация¹ формы q . Если $a \in Q$, то $q(a) = 0$ и равенство (17-2) равносильно ортогональности точек a и b :

$$b \in T_a Q \iff \tilde{q}(a, b) = 0. \quad (17-3)$$

Если $b \notin Q$, то ограничение формы q на одномерное подпространство $b \subset V$ невырождено и $V = b \oplus b^\perp$. Формула (17-3) утверждает, что видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики Q , т. е. ГМТ пересечения с квадратикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b , высекается из квадрики Q не проходящей через точку b гиперплоскостью

$$\mathbb{P}(b^\perp) = \{x \mid \tilde{q}(x, b) = 0\}, \quad (17-4)$$

которая называется *полярной* точки b относительно квадрики Q . Из формулы (17-3) также следует, что касательное пространство

$$T_a Q = \mathbb{P}(a^\perp) = \{x \mid \tilde{q}(x, a) = 0\} \quad (17-5)$$

либо является гиперплоскостью в $\mathbb{P}(V)$, либо совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$. В первом случае точка $a \in Q$ называется *гладкой* или *неособой*, а во втором — *особой*. Особость означает, что $\tilde{q}(v, a) = 0$ для всех $v \in V$, т. е. что a лежит в ядре корреляции² $\hat{q} : V \rightarrow V^*$, переводящей вектор $v \in V$ в линейную форму $w \mapsto \tilde{q}(w, v)$ на пространстве V . Все ненулевые векторы из $\ker \hat{q}$ изотропны и являются особыми точками квадрики Q . Проективное подпространство

$$\text{Sing } Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset Q$$

называется *пространством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики Q . Оно непусто если и только если квадратика $Q = V(q)$ особа, т. е. имеет $\det q = 0$.

ТЕОРЕМА 17.1

Пересечение особой квадрики Q с любым дополнительным к $\text{Sing } Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ является гладкой (возможно пустой) квадратикой $Q' = L \cap Q$ в подпространстве L , и исходная квадратика Q является линейным соединением³ Q' и $\text{Sing } Q$.

Доказательство. Невырожденность ограничения формы q на подпространство L была доказана в [предл. 14.5](#) на стр. 179. Каждая пересекающая $\text{Sing } Q$ прямая, будучи касательной к квадрике Q , либо целиком лежит на квадрике Q , либо пересекает Q ровно в одной точке — точке своего

¹См. п° 15.3 на стр. 186.

²См. п° 14.1.2 на стр. 171.

³Т. е. объединением всех прямых вида (ab) с $a \in Q'$ и $b \in \text{Sing } Q$, ср. с [упр. 17.10](#) на стр. 211.

пересечения с $\text{Sing } Q$. Поэтому каждая прямая (a, b) с $a \in \text{Sing } Q$, $b \in Q'$ целиком лежит на Q , т. е. $J(Q', \text{Sing } Q) \subset Q$. По [упр. 17.9](#) каждая не лежащая в L гладкая точка $c \in Q$ лежит на некоторой прямой, пересекающей L и $\text{Sing } Q$. Поскольку эта прямая пересекает Q в точке $c \notin \text{Sing } Q$, она целиком лежит на квадрике, а значит, пересекает L в точке, лежащей на квадрике Q' . Поэтому $Q \subset J(Q', \text{Sing } Q)$. \square

Упражнение 17.11. Покажите, что квадрика, имеющая хоть одну гладкую точку, не содержится в гиперплоскости.

17.3.2. Коники. Квадрики на проективной плоскости называются *кониками*. Так, кривая из [прим. 17.5](#) на стр. 209 представляет собою гладкую конику.

Вырожденная коника задаётся квадратичной формой q ранга 1 или 2. В первом случае q является квадратом линейной формы, поскольку в ортогональном базисе записывается в виде $q(x_0, x_1, x_2) = x_0^2$. Соответствующая коника $C = V(q)$ называется *двойной прямой*. Она выглядит как прямая $x_0 = 0$ и совпадает с $\text{Sing } C$. В терминологии [теор. 17.1](#) коника C является линейным соединением прямой $\text{Sing } C$ и пустой нульмерной квадрики¹. Если $\text{rk } q = 2$, пространство $\text{Sing } q$ является точкой — проективизацией одномерного ядра формы Q . По [теор. 17.1](#) пересечение такой коники C с любой не проходящей через особую точку прямой является гладкой квадрикой на этой прямой и, как мы видели [прим. 17.6](#), либо пусто, либо состоит из двух разных точек, причём над алгебраически замкнутым полем всегда имеет место второй случай. В первом же случае коника C называется *двойной точкой* и визуально совпадает со своей особой точкой. Например, над полем \mathbb{R} уравнение $x_0^2 + x_1^2 = 0$ задаёт двойную точку $(0 : 0 : 1)$. Во втором случае коника C является объединением двух различных прямых, пересекающихся в её особой точке, и называется *распавшейся*. В ортогональном базисе уравнение коники ранга 2 приводится к виду $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$ — тому же самому, что и в [прим. 17.6](#) на стр. 211. Точка $(0 : 0 : 1)$ является особой точкой такой коники, ограничение формы на дополнительную к ядру прямую $x_2 = 0$ анизотропно если $-\alpha$ не квадрат, и гиперболично если $-\alpha$ является квадратом. В последнем случае форма разлагается в произведение двух линейных множителей, задающих две прямые, на которые распадается коника C . Таким образом, вырожденные коники суть распавшаяся коника (объединение двух различных прямых), двойная прямая или двойная точка, причём над алгебраически замкнутым полем последний вариант не реализуется.

Невырожденная квадратичная форма q на трёхмерном пространстве либо анизотропна, либо является прямой ортогональной суммой двумерной гиперболической и одномерной анизотропной форм. В первом случае $V(q) = \emptyset$. Над полем \mathbb{R} такая коника задаётся уравнением $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Над алгебраически замкнутым полем таких коник нет.

Во втором случае в подходящих координатах коника задаётся уравнением

$$x_1^2 = x_0 x_2. \quad (17-6)$$

Поскольку любые значения $x_0 = t_0$, $x_1 = t_1$ однозначно дополняются до тройки

$$(t_0 : t_1 : t_1^2/t_0) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2),$$

удовлетворяющей уравнению (17-6), коника (17-7) является образом вложения

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2, \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2). \quad (17-7)$$

¹Дополнительным подпространством к прямой на плоскости является точка — проективизация одномерного векторного пространства, а невырожденная форма на одномерном пространстве автоматически анизотропна.

Когда точка $(t_0 : t_1)$ пробегает \mathbb{P}_1 , точка $(x_0 : x_1 : x_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$ ровно по одному разу пробегает все изотропные подпространства квадратичной формы $x_1^2 - x_0 x_2$.

Итак, над любым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ имеется единственная с точностью до линейной замены координат непустая невырожденная коника. В подходящих координатах она задаётся уравнением (17-6) и допускает рациональную параметризацию (17-7).

Пример 17.7 (проекция коники на прямую)

Получить рациональную параметризацию непустой невырожденной коники $C = V(q)$ можно без приведения её уравнения к виду $x_1^2 = x_0 x_2$, если явно известна хотя бы одна точка $p \in C$. Для этого надо спроектировать какую-нибудь не проходящую через p прямую ℓ из точки p на конику C , как на рис. 17◊8. Согласно сл. 17.1 каждая прямая (pr) с $r \in \ell$ пересекает конику C в точке p и ещё ровно в одной точке $x = x(r) \in C$, которая совпадает с p , если прямая $(pr) = T_p C$ касается коники C в точке p , и отлична от p , если (pr) не касается коники C в точке p . Во втором случае, если $r \in \ell \cap C$, то $x(r) = r$, а если точка r анизотропна для формы q , то две лежащие на прямой (pr) изотропные точки p и $x(r)$ переводятся друг в друга отражением¹ σ_r в \tilde{q} -ортогонале r^\perp к анизотропному вектору $r \in (pr)$. Таким образом, $x(r) = \sigma_r(p) = p - 2\tilde{q}(p, r) \cdot r / q(r)$.

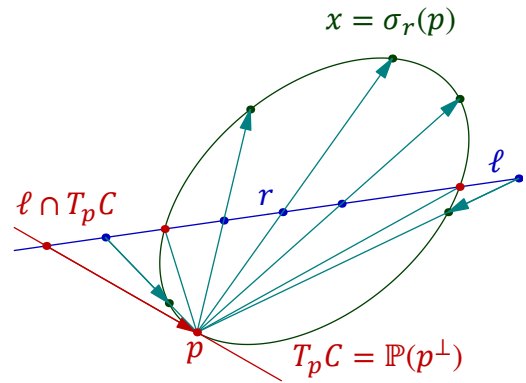


Рис. 17◊8. Проекция коники на прямую.

Умножая обе части на $q(r)$ мы можем записать ту же самую точку проективной плоскости в виде

$$x = q(r) \cdot p - 2\tilde{q}(p, r) \cdot r, \tag{17-8}$$

осмысленном и для $r \in \ell \cap C$. Формула (17-8) задаёт биекцию между точками $r \in \ell$ и $x \in C$.

Упражнение 17.12. Проверьте прямым вычислением, что точка x из формулы (17-8) лежит на конике.

Если выбрать на прямой ℓ какой-нибудь базис a, b и использовать векторы p, a, b в качестве базиса на \mathbb{P}_2 , то в формуле (17-8) однородные координаты $(x_p : x_a : x_b)$ точки x в этом базисе и однородные координаты $(t_a : t_b)$ точки $r \in \ell$ в базисе a, b выразятся друг через друга так:

$$\begin{aligned} (x_p : x_a : x_b) &= (q(t_a a + t_b b) : -2t_a \tilde{q}(p, t_a a + t_b b) : -2t_b \tilde{q}(p, t_a a + t_b b)) \\ (t_a : t_b) &= (x_a : x_b). \end{aligned} \tag{17-9}$$

Пример 17.8 (рациональная параметризация окружности и пифагоровы тройки)

Окружность $x_0^2 + x_1^2 = 1$ является изображением гладкой проективной коники $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ из прим. 17.5 в стандартной аффинной карте U_2 , где $x_2 = 1$. Построим рациональную параметризацию этой коники при помощи проекции из точки $p = e_0 + e_2 = (1 : 0 : 1)$ на задаваемую уравнением $x_0 = 0$ прямую $\ell = (e_1 e_2)$, как на рис. 17◊9 на стр. 215. Беря $r = t_1 e_1 + t_2 e_2 = (0 : t_1 : t_2)$, получаем $\tilde{q}(p, r) = -t_2$, $q(r) = t_1^2 - t_2^2$, и по формуле (17-9)

$$x = (t_1^2 - t_2^2)(e_0 + e_2) + 2t_2^2 e_2 + 2t_1 t_2 e_1 = (t_1^2 - t_2^2) e_0 + 2t_1 t_2 e_1 + (t_1^2 + t_2^2) e_2$$

¹См. п° 15.2 на стр. 184.

В стандартном базисе e_0, e_1, e_2 эта точка имеет однородные координаты

$$(x_0 : x_1 : x_2) = ((t_1^2 - t_2^2) : 2t_1t_2 : (t_1^2 + t_2^2)). \quad (17-10)$$

Альтернативный способ получения рациональной параметризации заключается в приведении квадратичной формы $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ к виду $a_1^2 = a_0a_2$ и использовании параметризации из форм. (17-7) на стр. 213:

$$(a_0 : a_1 : a_2) = (t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2).$$

Это делается линейной заменой переменных

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_2 = (a_0 + a_2)/2 \end{cases}$$

превращающей (17-7) в (17-10). Обратите внимание, что подставляя в правую часть формулы (17-10) всевозможные $(t_0, t_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, мы получим слева все возможные пифагоровы тройки¹ с точностью до пропорциональности.

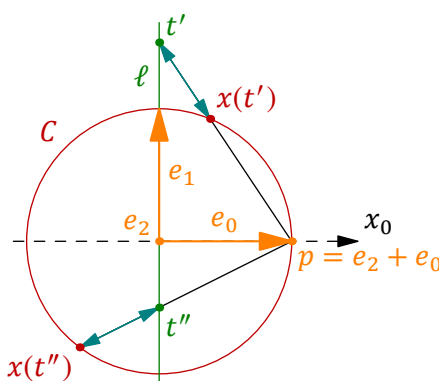


Рис. 17◊9. Параметризация окружности.

17.4. Однородные многочлены. Рассмотрим $(n + 1)$ -мерное векторное пространство V с базисом e_0, e_1, \dots, e_n над полем \mathbb{k} . Алгебра многочленов $\mathbb{k}[e_0, e_1, \dots, e_n]$ от коммутирующих переменных e_0, e_1, \dots, e_n с коэффициентами из \mathbb{k} называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V . Как векторное пространство над \mathbb{k} эта алгебра является прямой суммой счётного множества конечномерных векторных подпространств S^kV , образованных однородными многочленами степени k от e_0, e_1, \dots, e_n . При $k = 0$ пространство $S^0V = \mathbb{k}$ есть одномерное пространство констант. При $k = 1$ пространство $S^1V = V$ состоит из всевозможных линейных комбинаций базисных векторов и канонически отождествляется с V . Вообще, при каждом $k \geq 1$ пространство S^kV представляет собою линейную оболочку всевозможных произведений $v_1v_2 \dots v_k$, составленных из k произвольных векторов $v_i \in V$, и тем самым не зависит от выбора базиса в V . Поэтому для прямой суммы пространств S^kV уместно использовать более короткое и не привязанное к выбору базиса обозначение

$$SV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k \geq 0} S^kV.$$

Любой выбор базиса e_0, e_1, \dots, e_n в V задаёт в S^kV базис из мономов $e_0^{m_0}e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$ с целыми $m_i \geq 0$ и $m_0 + m_1 + \dots + m_n = k$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.13. Найдите $\dim S^kV$, если $\dim V = n + 1$.

17.4.1. Полиномиальные функции. Каждый ковектор $\varphi \in V^*$ представляет собою линейную функцию $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$. Сопоставим каждому произведению $f = \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_k \in S^kV^*$ ковекторов $\varphi_i \in V^*$ *полиномиальную функцию* $f : V \rightarrow \mathbb{k}$, $f(v) = \varphi_1(v)\varphi_2(v) \dots \varphi_k(v)$, и по линейности продолжим это сопоставление до гомоморфизма $SV^* \rightarrow \mathbb{k}^V$ симметрической алгебры пространства V^* в алгебру \mathbb{k}^V всех функций $V \rightarrow \mathbb{k}$. Если зафиксировать в V и V^* двойственные базисы $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ и $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, то функция $f : V \rightarrow \mathbb{k}$, отвечающая многочлену

¹Т. е. целочисленные решения уравнения Пифагора $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$.

$f(x_0, x_1, \dots, x_n) \in SV^*$, будет принимать на каждом векторе $v \in V$ значение, равное результату подстановки координат вектора v в базисе e вместо переменных x в многочлен f .

УПРАЖНЕНИЕ 17.14 (по алгебре и теории множеств). Убедитесь в этом и покажите, что для конечномерного векторного пространства V построенный нами гомоморфизм $SV^* \rightarrow \mathbb{k}^V$ инъективен если и только если поле \mathbb{k} бесконечно, и сюръективен если и только если поле \mathbb{k} конечно.

17.4.2. Проективные гиперповерхности. Важное отличие проективной геометрии от аффинной заключается в том, что отличный от константы многочлен $f \in SV^*$ не является функцией на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$, так как значения $f(v)$ и $f(\lambda v)$ на пропорциональных векторах обычно различны. Тем не менее, множество векторов $v \in V$ на которых обращается в нуль однородный многочлен $f \in S^k V$ является корректно определённой геометрической фигурой в $\mathbb{P}(V)$, так как равенства $f(v) = 0$ и $f(\lambda v) = \lambda^k f(v) = 0$ эквивалентны друг другу для любых ненулевых $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{k}$. Эта фигура обозначается $V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ и называется *проективной алгебраической гиперповерхностью степени k* , задаваемой однородным многочленом $f \in S^k V$. С точки зрения аффинного пространства $\mathbb{A}(V)$ множество нулей многочлена f представляет собою конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, а каждая такая прямая является точкой в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$. Проективная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ состоит ровно из этих точек.

17.4.3. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности. Произвольный¹ многочлен $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ задаёт в аффинном координатном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$ аффинную гиперповерхность $V(f) = \{v \in \mathbb{k}^n \mid f(v) = 0\}$. Запишем многочлен f в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, \dots, x_n),$$

где $d = \deg f$ и каждый многочлен f_k однороден степени k , и вложим \mathbb{A}^n в проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0 , на которой $x_0 = 1$. образуем из f однородный многочлен

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, \dots, x_n),$$

т. е. умножим в f каждый моном на такую степень переменной x_0 , чтобы степени всех мономов стали равны d . Полученный многочлен \bar{f} превращается обратно в f , если положить в нём $x_0 = 1$. Таким образом f и \bar{f} однозначно определяют друг друга. Проективная гиперповерхность $V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$ называется *проективным замыканием* аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Аффинная гиперповерхность $V(f) = V(\bar{f}) \cap U_0$ является той частью своего проективного замыкания, которая видна в стандартной аффинной карте U_0 . Точки проективного замыкания, лежащие в бесконечно удалённой по отношению к карте U_0 проективной гиперплоскости $x_0 = 0$, образуют в ней проективную гиперповерхность, которая в однородных координатах $(x_1 : \dots : x_n)$ описывается однородным уравнением $f_d(x_1, \dots, x_n) = 0$ и называется *поверхностью асимптотических направлений* аффинной гиперповерхности $V(f)$. Таким образом, асимптотическими направлениями аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ называются все такие векторы $v \in V$, на которых зануляется старшая однородная компонента f_d многочлена f . Обратите внимание, что аффинная прямая, проведённая в асимптотическом направлении, во все не обязательно является асимптотой аффинной гиперповерхности в том смысле, который принят в математическом анализе.

¹Не обязательно однородный.

Пример 17.9 (каспидальная кубика)

Проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_2 = x_1^3$ является проективная кубическая кривая $x_0^2 x_2 = x_1^3$, имеющая ровно одну бесконечно удалённую точку $p = (0 : 0 : 1)$, которой в исходной аффинной карте U_0 отвечает направление второй координатной оси x_2 . Обратите внимание, что никакая параллельная этой оси прямая $x_1 = \text{const}$ не является асимптотой функции $x_2 = x_1^3$ в смысле математического анализа. Точка p лежит в стандартной аффинной карте U_2 , на которой $x_2 = 1$. В этой карте кривая задаётся уравнением $x_0^2 = x_1^3$ и представляет собой полукубическую параболу с остриём¹ в точке p .

17.5. Конфигурации точек на прямой. Каждый неупорядоченный набор из n точек

$$p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2),$$

среди которых могут быть совпадающие, является алгебраической гиперповерхностью степени n . В самом деле, пусть $p_i = (\alpha_i : \beta_i)$. Обозначим через

$$\det(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} x_0 & \alpha \\ x_1 & \beta \end{pmatrix} = \beta x_0 - \alpha x_1$$

единственную с точностью до пропорциональности линейную форму на \mathbb{k}^2 , зануляющуюся на одномерном подпространстве, порождённом ненулевым вектором $p = (\alpha, \beta)$. Тогда однородный многочлен n -й степени

$$f(x_0, x_1) = \det(x, p_1) \cdot \det(x, p_2) \cdot \dots \cdot \det(x, p_n) = \prod_{v=1}^n (\beta_v x_0 - \alpha_v x_1), \quad (17-11)$$

зануляется на \mathbb{P}_1 ровно в точках p_1, \dots, p_n . Эти точки называются *корнями* однородного многочлена (17-11) на \mathbb{P}_1 . Будем называть *кратностью обращения в нуль* однородного многочлена $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1]$ в точке $p \in \mathbb{P}_1$ такое максимальное целое неотрицательное m , что f делится в $\mathbb{k}[x_0, x_1]$ на $\det^m(x, p_i)$.

Предложение 17.2

Однородный многочлен $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1]$ обращается в нуль в точке $p \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ если и только если он делится в $\mathbb{k}[x_0, x_1]$ на линейную форму $\det(x, p)$. В частности, ненулевой однородный многочлен степени n имеет не более n различных корней на \mathbb{P}_1 . Если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, то каждый однородный многочлен $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1]$ имеет на \mathbb{P}_1 ровно $\deg f$ корней с учётом их кратностей, и любые два многочлена с совпадающими наборами корней² пропорциональны.

Доказательство. Поскольку при линейных заменах координат в \mathbb{k}^2 линейная форма $\det(p, x)$ умножается на ненулевую константу³ первое утверждение не зависит от выбора координат в \mathbb{k}^2 . Выберем их так, чтобы $p = (0, 1)$. Пусть $f(x_0, x_1) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} x_1 + \dots + a_{n-1} x_0 x_1^{n-1} + a_n x_1^n$. Если $f(0, 1) = a_n = 0$, то f делится на $x_0 = \det(x, p)$, что и требуется. Второе утверждение вытекает из первого и однозначности разложения на неприводимые множители в кольце $\mathbb{k}[x_0, x_1]$,

¹По-английски *cusp*. Кальку *касп* иногда используют и в русском.

²Где каждый корень присутствует в наборе столько раз, какова его кратность.

³А именно, на определитель матрицы перехода между координатами.

поскольку линейные формы $\det(x, p_1)$ и $\det(x, p_2)$ отличаются друг от друга постоянным множителем если и только если точки $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1$ совпадают друг с другом. Для доказательства последних утверждений обозначим через m кратность, с которой f обращается в нуль в точке $q = (1 : 0)$. Тогда $f(x_0, x_1) = x_1^m (a_0 x_0^{n-m} + a_1 x_0^{n-m-1} x_1 + \dots + a_{n-m} x_1^{n-m})$, где $a_0 \neq 0$. Если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, то многочлен $f(x_0, 1)$ полностью раскладывается в $\mathbb{k}[x_0]$ на линейные множители: $a_0 x_0^{n-m} + a_1 x_0^{n-m-1} + \dots + a_{n-m} = a_0 (x_0 - \vartheta_1) \dots (x_0 - \vartheta_{n-m})$. Тогда

$$a_0 x_0^{n-m} + a_1 x_0^{n-m-1} x_1 + \dots + a_{n-m} x_1^{n-m} = a_0 (x_0 - \vartheta_1 x_1) \dots (x_0 - \vartheta_{n-m} x_1)$$

и $f = \det^m(x, q) \det(x, p_1) \dots \det(x, p_{n-m})$, где $q = (1 : 0)$ и $p_i = (1 : \vartheta_i)$. \square

17.5.1. Кривые Веронезе. Неупорядоченный набор точек p_1, \dots, p_n на прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ можно воспринимать как коммутативное произведение $p_1 \dots p_n$, т. е. как точку проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(S^n U)$ однородных элементов степени n в симметрической алгебре SU двумерного векторного пространства U . Множество всех n -точечных конфигураций вида p^n , в которых все n точек совпадают друг с другом, представляет собою кривую в \mathbb{P}_n — образ прямой \mathbb{P}_1 при отображении Веронезе

$$v_n : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(S^n U), \quad p \mapsto p^n. \quad (17-12)$$

Эта кривая называется *кривой Веронезе* или *рациональной нормальной кривой* степени n в \mathbb{P}_n . Если зафиксировать в U базис e_0, e_1 , отображение (17-12) будет переводить линейный двучлен $p = t_0 e_0 + t_1 e_1 \in \mathbb{k}[e_0, e_1]$ в однородный многочлен

$$(t_0 e_0 + t_1 e_1)^n = \sum_{i=0}^n t_0^{n-i} t_1^i \binom{n}{i} e_0^{n-i} e_1^i.$$

Если $\text{char } \mathbb{k} > n$, все одночлены $\binom{n}{i} e_0^{n-i} e_1^i$ в правой части этой формулы отличны от нуля и образуют базис¹ в $S^n U$. В однородных координатах относительно этого базиса отображение Веронезе $v_n : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_n$ действует по правилу

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^n : t_0^{d-1} t_1 : t_0^{d-2} t_1^2 : \dots : t_1^n). \quad (17-13)$$

Точки $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$ переходят при этом в $(1 : 0 : \dots : 0 : 0)$ и $(0 : \dots : 0 : 1)$, а когда обе координаты $(t_0 : t_1)$ ненулевые, последовательность однородных координат в правой части (17-13) является ненулевой геометрической прогрессией со знаменателем $q = t_1/t_0$. Наоборот, каждая ненулевая геометрическая прогрессия $(1 : q : q^2 : \dots : q^n)$ является образом точки $(1 : q)$ при отображении (17-13). Так как числа x_0, x_1, \dots, x_n образуют геометрическую прогрессию если и только если составленная из них матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{d-1} & x_n \end{pmatrix}$$

имеет пропорциональные строки, что равносильно равенству $\text{rk } X = 1$, мы заключаем, что образ отображения Веронезе задаётся в \mathbb{P}_n системой однородных квадратных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ x_{i+1} & x_{j+1} \end{pmatrix} = x_i x_{j+1} - x_{i+1} x_j = 0, \quad \text{где } 0 \leq i < j \leq n. \quad (17-14)$$

¹Обратите внимание, что при $\text{char } \mathbb{k} < n$ этого может не случиться. Например, если $\text{char } \mathbb{k} = p$ и $n = p^m q$, то $(t_0 e_0 + t_1 e_1)^n = (t_0 e_0 + t_1 e_1)^q$.

Предложение 17.3

Если $\text{char } \mathbb{k} > n$, то при $1 \leq k \leq n$ образы любых $k + 1$ различных точек на \mathbb{P}_1 при отображении Веронезе (17-13) не содержатся ни в каком $(k - 1)$ -мерном проективном подпространстве. В частности, отображение Веронезе инъективно, и никакая гиперплоскость в \mathbb{P}_n не пересекает кривую Веронезе более, чем по n точкам.

Доказательство. Достаточно доказать первое утверждение для максимального $k = n$. Обозначим через $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ однородные координаты на $P_n = \mathbb{P}(S^n U)$ в базисе из одночленов $\binom{n}{i} e_0^{n-i} e_1^i$, где e_0, e_1 — базис в U . Если отображение (17-13) переводит точку $p = (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}_1$ внутрь гиперплоскости, заданной уравнением $a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, где $a_i \in \mathbb{k}$, то точка p является корнем однородного многочлена $f(t_0, t_1) = a_0 t_0^n + a_1 t_0^{n-1} t_1 + \dots + a_n t_1^n$, у которого не более n различных корней на \mathbb{P}_1 . Поэтому образы $n + 1$ различных точек не могут оказаться в одной гиперплоскости. \square

Пример 17.10 (коника Веронезе)

Коника Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U)$ состоит из всех таких однородных квадратичных многочленов $x_0 e_0^2 + 2x_1 e_0 e_1 + x_2 e_1^2$ от базисных векторов e_0, e_1 пространства U , которые являются полными квадратами линейных форм от e_0, e_1 . Система (17-14) в этом случае состоит из одного уравнения

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_0 x_2 = 0, \quad (17-15)$$

задающего гладкую конику, а отображение Веронезе (17-13) задаёт эту же конику параметрическими уравнениями $x_0 = t_0^2, x_1 = t_0 t_1, x_2 = t_1^2$, где $t = (t_0 : t_1)$ пробегает \mathbb{P}_1 , что согласуется с форм. (17-7) на стр. 213.

Поскольку любую непустую гладкую конику можно в подходящих однородных координатах записать уравнением $x_1^2 = x_0 x_2$, проективную плоскость с заданной ей непустой гладкой коникой всегда можно отождествить с $\mathbb{P}(S^2 U)$ так, чтобы коника стала коникой Веронезе. При фиксированной точке $p \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ множество всех пар pt , где $t = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1$ пробегает \mathbb{P}_1 , изображается на плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 V)$ прямой, проходящей через точки ae_0 и ae_1 . Такая прямая касается коники Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}(S^2 U)$ в точке $p^2 \in C_2$. Мы заключаем, что касательные прямые $T_{a^2} C_2$ и $T_{b^2} C_2$, проведённые в произвольных двух точках $a^2, b^2 \in C_2$, пересекаются в точке ab . Таким образом, из каждой точки вида $ab \in \mathbb{P}(S^2 U)$ на конику Веронезе можно опустить ровно две касательные. Они состоят из точек at и bt , где t пробегает \mathbb{P}_1 , и касаются коники Веронезе в точках a^2 и b^2 соответственно. Если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, каждая точка плоскости $\mathbb{P}(S^2 U)$ имеет вид ab , поскольку каждый однородный многочлен от e_0, e_1 полностью разлагается на линейные множители. Если же поле \mathbb{k} не является алгебраически замкнутым, то на плоскости $\mathbb{P}(S^2 V)$ могут быть точки, не представимые в виде ab , и ни из какой такой точки нельзя опустить касательную на конику Веронезе.

17.6. Пространства гиперповерхностей. Так как пропорциональные многочлены задают одну и ту же гиперповерхность, каждая проективная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ может рассматриваться как точка проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое называется *пространством гиперповерхностей*. Согласно упр. 17.13 на стр. 215

$$\dim \mathbb{P}(S^d V^*) = \binom{n+d}{d} - 1. \quad (17-16)$$

Например, пространство квадратиков $\mathbb{P}(S^2V^*)$ на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ имеет размерность

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Проективные подпространства положительной размерности в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. Например, все гиперповерхности степени d , проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}(V)$, образуют в $\mathbb{P}(S^dV^*)$ проективную гиперплоскость¹, задаваемую линейным по $f \in S^dV^*$ уравнением $f(p) = 0$. Поскольку любая линейная система имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью в пространстве гиперповерхностей, в каждой линейной системе имеется гиперповерхность, проходящая через любую наперёд заданную точку.

Каждая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями

$$V(f_1), \dots, V(f_m),$$

задаётся уравнением вида $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = 0$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$ — некоторые константы, и автоматически содержит пересечение $V(f_1) \cap \dots \cap V(f_m)$, которое называется *базисным множеством* линейной системы. Таким образом, базисное множество является пересечением всех гиперповерхностей линейной системы, и любой порождающий эту систему набор гиперповерхностей пересекается в точности по базисному множеству.

По старинной традиции, одномерные, двумерные и трёхмерные линейные системы принято называть *пучками*, *связками* и *сетями* соответственно. Например, все прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_2$, образуют пучок, ибо составляют прямую² $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$. Точно также все двумерные плоскости, проходящие через заданную прямую $\ell \subset \mathbb{P}_3$, составляют прямую $\ell^\times \subset \mathbb{P}_3^\times$ и, стало быть, тоже образуют пучок.

Предложение 17.4

Через любые пять точек на \mathbb{P}_2 можно провести конику. Если никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие три не коллинеарны, то она вдобавок ещё и гладкая.

Доказательство. Коники на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ являются точками пространства $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые пять гиперплоскостей в \mathbb{P}_5 имеют непустое пересечение, через любые пять точек в \mathbb{P}_2 проходит хотя бы одна коника.

Если какие-то три из пяти точек коллинеарны, то проходящая через них прямая целиком содержится в конике в силу [сл. 17.1](#) на [стр. 211](#). Согласно классификации из [п° 17.3.2](#) на [стр. 213](#) такая коника является двойной прямой или распадается. В первом случае все пять точек должны быть коллинеарны. Поэтому когда никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, коника распадается, причём её вторая прямолинейная компонента однозначно задаётся тем, что проходит через оставшиеся две точки.

Если никакие три из пяти точек не коллинеарны, то согласно классификации из [п° 17.3.2](#) на [стр. 213](#) каждая проходящая через эти пять точек коника является гладкой. Единственность такой коники вытекает из следующего далее [предл. 17.5](#). □

¹Т. е. линейную систему коразмерности 1.

²См. [п° 17.2.2](#) на [стр. 210](#).

Предложение 17.5

Гладкая коника и произвольная кривая степени d на \mathbb{P}_2 либо пересекаются не более, чем по $2d$ точкам, либо коника целиком содержится в кривой.

Доказательство. Каждая непустая гладкая коника на \mathbb{P}_2 является образом инъективного отображения $q : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2$, которое в подходящих однородных координатах задаётся правилом

$$q : (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2). \quad (17-17)$$

Если точка $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}_1$ переводится этим отображением в точку, лежащую на кривой, заданной однородным уравнением $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ степени d , то эта точка является корнем однородного многочлена $f(t_0^2, t_0 t_1, t_1^2)$ степени $2d$. Если этот многочлен тождественно нулевой, то образ отображения (17-17) целиком содержится в кривой. Если он ненулевой, то у него не более $2d$ различных корней. \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 17.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n + 1)$ -мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е. $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$.

Упр. 17.4. Это следует из соотношения $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$.

Упр. 17.5. Если стягиваемая петля настолько мала, что почти не отличается от точки, устойчивое к малым шевелениям количество точек её пересечения с любой петлёй равно нулю. При изменении размеров петли устойчивые точки пересечения появляются и исчезают по две.

Упр. 17.7. Пусть $K = \mathbb{P}(W)$. Векторное подпространство $W \subset V$ имеет размерность $k + 1$ и либо содержится в гиперплоскости $\text{Ann}(\xi)$, либо пересекается с нею по k -мерному векторному пространству $W' = \text{Ann}(\xi|_W) \subset W$. В первом случае K не пересекается с картой U_ξ , во втором случае пересечение $K \cap U_\xi$ представляет собою аффинное пространство над векторным пространством $W \cap \text{Ann} \xi = W'$.

Упр. 17.9. Если $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$ и $v \notin U \cup W$, то u и w линейно независимы, и $v \in (u, w)$. Если отвечающая вектору v точка проективного пространства лежит на какой-то ещё прямой (ab) с $a \in U$ и $b \in W$, то $v = \lambda a + \mu b$ для некоторых ненулевых $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$, причём $\lambda a = u$ и $\mu b = w$ в силу единственности разложения вектора v . Поэтому a и u , так же как b и w , суть совпадающие точки проективного пространства. В частности, $(uw) = (ab)$.

Упр. 17.11. Для нульмерной квадрики на \mathbb{P}_1 утверждение очевидно. Пусть при $n \geq 2$ квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ содержится в гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}_n$ и имеет гладкую точку $a \in Q$. Тогда каждая проходящая через a и не содержащаяся в H прямая пересекает Q ровно в одной точке a , т. е. лежит в $T_p Q$. Поэтому $\mathbb{P}_n = H \cup T_p Q$. Если $H = V(\xi)$, $T_p Q = V(\eta)$ для каких-то ненулевых ковекторов $\xi, \eta \in V^*$, то квадратичная форма $q(v) = \xi(v)\eta(v)$ тождественно зануляется на векторном пространстве V . Но тогда и оба сомножителя ξ, η должны быть нулевыми. Противоречие.

Упр. 17.12. $q(\tilde{q}(r, r)p - 2\tilde{q}(p, r)r) = -4\tilde{q}(r, r)\tilde{q}^2(p, r) + 4\tilde{q}^2(p, r)\tilde{q}(r, r) = 0$.

Упр. 17.13. Ответ: биномиальный коэффициент $\binom{n+k}{n}$.

Упр. 17.14. Если основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{F}_q$ состоит из q элементов, алгебра функций $\mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q$ состоит из q^{q^n} элементов, и гомоморфизм бесконечной алгебры многочленов в конечную алгебру функций не может быть инъективен. Зато он сюръективен, поскольку для любого конечного набора точек в \mathbb{k}^n существует многочлен $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, принимающий в этих точках любые наперёд заданные значения (убедитесь в этом). Над бесконечным полем \mathbb{k} множество функций $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ строго мощнее, чем \mathbb{k}^n , а пространство многочленов равномощно \mathbb{k} . Поэтому гомоморфизм из алгебры многочленов в алгебру функций не может быть сюръективным. Инъективность доказывается индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ это утверждение о том, что ненулевой многочлен от одной переменной не может иметь бесконечно много корней. Записывая многочлен от n переменных как многочлен от x_n с коэффициентами из $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_{n-1}]$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^d \varphi_v(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-v}$$
 и вычисляя коэффициенты φ_v в произвольной точке $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{k}^{n-1}$, мы получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой, состоящей из точек вида (p_1, \dots, p_{n-1}, t) , где $t \in \mathbb{k}$, в \mathbb{k}^n . По уже доказанному, он нулевой. Следовательно, все многочлены φ_v являются

тождественно нулевыми функциями на \mathbb{k}^{n-1} . По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами.