

§4. Многомерие

4.1. Базисы и размерность. Рассмотрим произвольное векторное пространство V над любым полем \mathbb{k} . Будем говорить, что вектор $v \in V$ *линейно выражается* через векторы w_1, w_2, \dots, w_m , если $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$ для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{k}$. Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов $w_i \in V$ с коэффициентами $\lambda_i \in \mathbb{k}$. Набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ называется *порождающим* векторное пространство V , если каждый вектор $v \in V$ линейно через него выражается. Векторное пространство, порождённое конечным набором векторов, называется *конечномерным*. Порождающий набор векторов $e_1, \dots, e_n \in V$ называется *базисом* векторного пространства V , если любой вектор $v \in V$ линейно выражается через него *единственным* образом, т. е. если из равенства

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

вытекает, что $x_i = y_i$ для всех i . Коэффициенты x_i единственного линейного выражения

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

называются *координатами* вектора v в базисе e_1, \dots, e_n . Например, в координатном векторном пространстве \mathbb{k}^n из [прим. 1.2](#) на стр. 8 векторы

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad \text{где } 1 \leq i \leq n, \quad (4-1)$$

с единицей на i -м месте и нулями в остальных местах образуют базис, поскольку произвольный вектор $v \in \mathbb{k}^n$ линейно выражается через них единственным способом:

$$v = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (4-2)$$

Базис (4-1) называется *стандартным* базисом координатного пространства \mathbb{k}^n . Вскоре мы убедимся, что любое конечномерное векторное пространство V обладает базисом, причём все базисы в V состоят из одинакового числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$. Таким образом, $\dim \mathbb{k}^n = n$.

4.1.1. Линейная зависимость. Векторы $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \quad (4-3)$$

вытекает, что все $\lambda_i = 0$. Наоборот, если существует линейная комбинация (4-3), в которой хоть один коэффициент $\lambda_i \neq 0$, то векторы v_1, v_2, \dots, v_m называются *линейно зависимыми*. Если между векторами есть линейная зависимость, то каждый вектор, входящий в неё с ненулевым коэффициентом, линейно выражается через остальные векторы. Например, если $\lambda_m \neq 0$ в линейной зависимости (4-3), то

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1}.$$

Наоборот, любое линейное выражение вида $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$ можно воспринимать как линейную зависимость $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0$. Обратите внимание, что любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим, поскольку $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot v = 0$ для произвольного $v \in V$.

ЛЕММА 4.1

Порождающий векторное пространство V набор векторов $\{e_i\}$ является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $v = \sum x_i e_i$ допускает другое выражение $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i . Наоборот, любые два различных разложения $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$ влекут линейную зависимость $\sum (x_i - y_i) e_i = 0$. \square

ЛЕММА 4.2 (ЛЕММА О ЗАМЕНЕ)

Если векторы w_1, w_2, \dots, w_m порождают пространство V , а $u_1, \dots, u_k \in V$ линейно независимы, то $m \geq k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор векторов

$$u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_m,$$

полученный заменой первых k из них на векторы u_i , тоже порождает V .

Доказательство. Пусть $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$. Так как векторы u_i линейно независимы, $u_1 \neq 0$ и среди коэффициентов x_i есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы w_i так, чтобы $x_1 \neq 0$. Поскольку вектор w_1 линейно выражается через u_1 и w_2, \dots, w_m :

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m,$$

векторы $u_1, w_2, w_3, \dots, w_m$ порождают V . Далее действуем по индукции. Пусть для очередного $i < k$ векторы $u_1, u_2, \dots, u_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_m$ порождают V . Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \dots + x_m w_m.$$

В силу линейной независимости векторов u_i вектор u_{i+1} нельзя линейно выразить только через векторы u_1, u_2, \dots, u_i . Поэтому в предыдущем разложении присутствует с ненулевым коэффициентом хоть один из оставшихся векторов w_j . Следовательно, $m > i$ и мы можем занумеровать оставшиеся w_j так, чтобы $x_{i+1} \neq 0$. Теперь, как и на первом шагу, вектор w_{i+1} линейно выражается через векторы $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}, \dots, w_m$. Тем самым, эти векторы линейно порождают V , что воспроизводит индуктивное предположение. \square

ТЕОРЕМА 4.1 (ТЕОРЕМА О БАЗИСЕ)

В конечномерном векторном пространстве V каждый порождающий V набор векторов содержит в себе некоторый базис, все базисы состоят из одинакового количества векторов, и каждый линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

Доказательство. Поскольку векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, во всех базисах одинаковое число векторов. Если конечный набор векторов порождает V , то последовательно выкидывая из него векторы, линейно выражающиеся через остальные, мы придём к линейно независимому порождающему набору, т. е. к базису.

Если задан линейно независимый набор векторов u_1, \dots, u_k , то по лемме о замене в любом базисе e_1, \dots, e_n пространства V можно заменить некоторые k векторов e_i векторами u_i так, что полученный набор из n векторов останется порождающим. Он будет базисом, так как по уже доказанному содержит в себе некоторый базис из n векторов. \square

Следствие 4.1

В n -мерном векторном пространстве V всякий линейно независимый набор из n векторов, а также всякий порождающий набор из n векторов являются базисами.

Доказательство. По лем. 4.2 при замене любого базиса любыми n линейно независимыми векторами получится порождающий набор, т. е. тоже базис. По теор. 4.1 любой порождающий набор из n векторов содержит в себе некоторый базис. Так как этот базис тоже состоит из n векторов, он совпадает с исходным набором. \square

Следствие 4.2

В конечномерном пространстве V каждое векторное подпространство $U \subset V$ тоже конечномерно, и $\dim U \leq \dim V$, где равенство возможно только при $U = V$.

Доказательство. Если k векторов $u_1, \dots, u_k \in U$ линейно независимы, но не порождают U , то для любого ненулевого вектора $u_{k+1} \in U$, который линейно через них не выражается, набор из $k + 1$ векторов u_1, \dots, u_k, u_{k+1} тоже будет линейно независим. По лемме о замене, линейно независимый набор в $U \subset V$ не может содержать больше $\dim V$ векторов. Таким образом, начав с произвольного линейно независимого набора векторов в U и добавляя к нему векторы, линейно не выражающиеся через предыдущие, мы через конечное число шагов получим линейно независимый набор, порождающий U , т. е. базис. По теореме о базисе, этот базис можно достроить до базиса в V . Поэтому $\dim U \leq \dim V$. Если $\dim U = \dim V$, то по предыдущему сл. 4.1 всякий базис в U является одновременно базисом в V , откуда $V = U$. \square

Следствие 4.3

Всякое n -мерное векторное пространство V над полем \mathbb{k} изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^n . Линейные изоморфизмы $\mathbb{k}^n \simeq V$ взаимно однозначно соответствуют базисам в V .

Доказательство. Если задан линейный изоморфизм $F : \mathbb{k}^n \simeq V$, то векторы¹ $v_i = F(e_i)$ образуют базис пространства V , и разным линейным отображениям отвечают разные базисы, поскольку из равенств $F(e_i) = G(e_i)$ для всех i вытекает, что и для любого вектора $v = \sum x_i e_i \in V$

$$F(v) = F\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i G(e_i) = G\left(\sum x_i e_i\right) = G(v).$$

Наоборот, для любого базиса v_1, \dots, v_n пространства V отображение

$$F : \mathbb{k}^n \rightarrow V, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n,$$

линейно, биективно и переводит e_i в v_i для всех i . \square

Пример 4.1 (пространство функций)

Множество \mathbb{k}^X всех функций $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ на произвольном множестве X со значениями в произвольном поле \mathbb{k} образует векторное пространство, в котором сложение функций и их умножение на числа задаётся обычными правилами:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : x &\mapsto f_1(x) + f_2(x) \\ \lambda f : x &\mapsto \lambda \cdot f(x). \end{aligned}$$

¹Здесь и далее $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{k}^n$ обозначает стандартный базис в \mathbb{k}^n из формулы форм. (4-1) на стр. 47.

Для n -элементного множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ пространство функций \mathbb{k}^X изоморфно отображается на координатное пространство \mathbb{k}^n сопоставлением функции f набора её значений $(f(1), f(2), \dots, f(n))$. Этому изоморфизму отвечает базис из δ -функций $\delta_i : X \rightarrow \mathbb{k}$:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

ПРИМЕР 4.2 (ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА)

Зафиксируем $n + 1$ различных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ и обозначим через $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ пространство многочленов степени не выше n . По определению многочленов, мономы $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют базис в $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$, и $\dim \mathbb{k}[x]_{\leq n} = n + 1$. Для каждого $i = 0, 1, 2, \dots, n$ обозначим через

$$f_i(x) = \prod_{v \neq i} (x - a_v) : \prod_{v \neq i} (a_i - a_v)$$

многочлен степени n , зануляющийся во всех точках a_v кроме точки a_i , а в точке a_i принимающий значение $f_i(a_i) = 1$. Многочлены f_i линейно независимы, так как подставляя в равенство

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$$

значение $x = a_i$, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Тем самым, многочлены f_i тоже образуют базис пространства $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$. Подставляя в разложение

$$g(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \dots + x_n f_n(x)$$

произвольного многочлена $g \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$ по базису f_0, f_1, \dots, f_n значение $x = a_i$, мы заключаем, что $x_i = g(a_i)$, т. е. i -я координата многочлена g в базисе f_0, f_1, \dots, f_n равна значению этого многочлена в точке a_i . Таким образом, для любого набора значений $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{k}$ существует единственный такой многочлен $g \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$, что $g(a_i) = b_i$ для всех i , а именно —

$$g(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_n f_n(x).$$

ПРИМЕР 4.3 (КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ)

Пусть конечное поле \mathbb{K} содержит подполе $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{K}$, состоящее из q элементов. Будучи конечномерным векторным пространством над \mathbb{F}_q , поле \mathbb{K} находится в линейной биекции с координатным пространством \mathbb{F}_q^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и, тем самым, состоит из q^n элементов. Применяя это наблюдение к простому подполю поля \mathbb{K} , состоящему из всех элементов вида¹

$$\pm \frac{1 + \dots + 1}{1 + \dots + 1} \in \mathbb{K}$$

с ненулевым знаменателем, мы заключаем, что число элементов в любом конечном поле является степенью некоторого простого числа.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1 (ПО АЛГЕБРЕ). Убедитесь, что простое подполе любого поля изоморфно либо полю \mathbb{Q} , либо полю вычетов $\mathbb{Z}/(p)$ по некоторому простому модулю $p \in \mathbb{N}$.

¹Ср. с н° 2.1.2 на стр. 23.

4.2. Подпространства. Пересечение любого множества векторных подпространств в произвольном векторном пространстве V также является подпространством в V .

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Убедитесь в этом.

Пересечение всех подпространств, содержащих данное множество векторов $M \subset V$, называется *линейной оболочкой* множества M и обозначается $\text{span}(M)$. Это наименьшее по включению векторное подпространство в V , содержащее M . Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из M , ибо все такие линейные комбинации очевидным образом образуют векторное пространство и содержатся во всех векторных подпространствах, содержащих M .

ПРИМЕР 4.4 (гиперплоскости)

Линейная оболочка $H = \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1})$ произвольных $n - 1$ линейно независимых векторов в n -мерном векторном пространстве V является $(n - 1)$ -мерным подпространством. Такие подпространства называются *гиперплоскостями* в V . Если дополнить векторы v_i некоторым вектором v_n до базиса в V и обозначить через $x = (x_1, \dots, x_n)$ координаты относительно этого базиса, то гиперплоскость H можно описать как ГМТ x удовлетворяющих линейному уравнению $x_n = 0$. Покажем, что и наоборот, для любого ненулевого линейного отображения $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ множество $\text{Ann } \xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\}$ является гиперплоскостью.

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Убедитесь, что $\text{Ann } \xi \subset V$ является векторным подпространством.

Пусть векторы u_1, u_2, \dots, u_m составляют базис подпространства $\text{Ann } \xi$, а вектор v таков, что $\xi(v) \neq 0$. Векторы v, u_1, u_2, \dots, u_m линейно независимы, ибо векторы u_i линейно независимы, а вектор $v \notin \text{Ann } \xi$ через них не выражается. Для любого вектора $w \in V$ вектор

$$w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v \in \text{Ann } \xi$$

и, тем самым, линейно выражается через векторы u_i . Следовательно, векторы v, u_1, u_2, \dots, u_m составляют базис в V , откуда $m = \dim V - 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Покажите, что векторное пространство \mathbb{k}^n над бесконечным полем \mathbb{k} не является объединением конечного числа своих гиперплоскостей.

4.2.1. Сумма подпространств. Объединение векторных подпространств почти никогда не является векторным пространством. Например, прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ являются одномерными векторными подпространствами координатной плоскости \mathbb{k}^2 , но сумма любого ненулевого вектора первого из них с любым ненулевым вектором второго не лежит в их объединении — скажем, $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Покажите, что объединение двух подпространств является векторным пространством если и только если одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения произвольного множества подпространств $U_\nu \subset V$ называется *суммой* подпространств U_ν и обозначается

$$\sum_{\nu} U_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span} \bigcup_{\nu} U_{\nu}.$$

Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \\ U_1 + U_2 + U_3 &= \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 (ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ)

Сумма $U_1 + \dots + U_n$ подпространств $U_1, \dots, U_n \subset V$ называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ если каждый вектор $w \in U_1 + \dots + U_n$ имеет единственное представление $w = u_1 + \dots + u_n$, в котором $u_i \in U_i$ при каждом i , т. е. отображение множеств $U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow U_1 + \dots + U_n$, переводящее набор векторов $(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ в вектор $u_1 + \dots + u_n \in U_1 + \dots + U_n$ биективно.

Например, пространство V является прямой суммой своих одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами e_1, \dots, e_n , если и только если эти векторы образуют в V базис.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1

Сумма подпространств $U_1, \dots, U_n \subset V$ является прямой если и только если каждое из подпространств имеет нулевое пересечение с суммой всех остальных. В частности, сумма $U + W$ двух подпространств прямая тогда и только тогда, когда $U \cap W = 0$.

Доказательство. Обозначим через W_i сумму всех подпространств U_ν за исключением i -того подпространства U_i . Если пересечение $U_i \cap W_i$ содержит ненулевой вектор

$$u_i = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_n, \text{ где } u_i \in U_i \text{ при всех } i,$$

то у этого вектора имеется два различных представления¹

$$0 + \dots + 0 + u_i + 0 + \dots + 0 = u_1 + \dots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \dots + u_n.$$

Поэтому такая сумма не прямая. Наоборот, если $U_i \cap W_i = 0$ при всех i и имеется равенство

$$u_1 + \dots + u_n = w_1 + \dots + w_n, \text{ где } u_\nu, w_\nu \in U_\nu \text{ при всех } i,$$

то, переписывая его для каждого $i = 1, \dots, n$ как $u_i - w_i = \sum_{\nu \neq i} (w_\nu - u_\nu)$, видим, что этот вектор лежит в $U_i \cap W_i = 0$. Поэтому $u_i = w_i$ для любого i . \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Покажите, что сумма подпространств $U_1, \dots, U_m \subset V$ является прямой если и только если любой набор ненулевых векторов u_1, \dots, u_m , в котором $u_i \in U_i$ при каждом i , линейно независим.

4.2.2. Размерность суммы и пересечения. По сл. 4.2 на стр. 49 для любого подпространства U конечномерного пространства V выполняется неравенство $\dim U \leq \dim V$. Разность $\text{codim}_V U \stackrel{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$ называется *коразмерностью* подпространства U в V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2

Для любых конечномерных подпространств U_1, U_2 в произвольном² векторном пространстве V выполняется равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис u_1, \dots, u_k в $U_1 \cap U_2$ и дополним его векторами v_1, \dots, v_r и w_1, \dots, w_s до базисов в подпространствах U_1 и U_2 соответственно. Достаточно показать, что векторы $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ образуют базис пространства $U_1 + U_2$. Ясно,

¹В левом отлично от нуля только i -е слагаемое, а в правом оно нулевое.

²Не обязательно конечномерном.

что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$ и $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$ в отдельности линейно независим, в равенстве

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

имеются как векторы v_i , так и векторы w_j . Переносим w_1, \dots, w_s в правую часть, получаем равенство между вектором из U_1 и вектором из U_2 , означающее, что этот вектор лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Но тогда в его разложении по базисам пространств U_1 и U_2 нет векторов v_i и w_j — противоречие. \square

Следствие 4.4

Для любых подпространств U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V).$$

В частности, $U_1 \cap U_2 \neq 0$ при $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из [предл. 4.2](#) и неравенства $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V$. \square

Следствие 4.5 (дополнительные подпространства)

Следующие два свойства векторных подпространств U_1, U_2 в конечномерном векторном пространстве V эквивалентны¹:

- 1) $V = U_1 \oplus U_2$
- 2) $U_1 \cap U_2 = 0$ и $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$

Доказательство. При $U_1 \cap U_2 = 0$ равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$ равносильно равенству $\dim(U_1 + U_2) = \dim V$, означающему, что $U_1 + U_2 = V$. \square

4.3. Аффинная геометрия. Пусть множество A является аффинным пространством² над векторным пространством V . Для любой точки $p \in A$ и любого векторного подпространства $U \subset V$ множество точек

$$P(p, U) = p + U = \{p + u \mid u \in U\}$$

называется проходящим через точку p *аффинным подпространством* в A с *направляющим векторным подпространством* U . Размерность аффинного пространства $P(p, U)$ по определению полагается равной размерности $\dim U$ его направляющего векторного подпространства.

Пример 4.5 (прямые и плоскости)

Аффинные подпространства $p + U$, где $\dim U = 1, 2$ называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида $p + vt$, где p — некоторая точка, v — ненулевой вектор, а t пробегает \mathbb{k} . Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида $p + \lambda u + \mu w$, где p — некоторая точка, u, w — пара непропорциональных векторов, а λ, μ независимо пробегает \mathbb{k} . Отметим, что к любой такой плоскости применимо всё сказанное нами в §§ 1, 2.

¹Обладающие этими свойствами подпространства U_1, U_2 называются *дополнительными*.

²См. н° 1.4 на стр. 13.

Предложение 4.3

Аффинные подпространства $p + U$ и $q + W$ пересекаются если и только если $\overline{p_0q} \in U + W$, и в этом случае их пересечение является аффинным пространством с направляющим векторным пространством $U \cap W$.

Доказательство. Равенство $\overline{p_0q} = u + w$ равносильно равенству $p + u = q + w$, означающему, что точка $r = p + u = q + w \in (p + U) \cap (q + W)$. Если такая точка r существует, то для любой лежащей в пересечении $(p + U) \cap (q + W)$ точки $r' = p + u' = q + w'$ вектор $\overline{rr'} = u' - u = w' + w \in U \cap W$. Наоборот, для любого вектора $v \in U \cap W$ точка $r + v$ лежит в $(p + U) \cap (q + W)$. \square

Следствие 4.6

Следующие условия на аффинные подпространства $p + U$ и $q + U$ с одним и тем же направляющим подпространством $U \subset V$ эквивалентны: (1) $\overline{p_0q} \in U$ (2) $p \in q + U$ (3) $q \in p + U$ (4) $p + U = q + U$ (5) $(p + U) \cap (q + W) \neq \emptyset$. \square

Предложение 4.4

Точки p_0, p_1, \dots, p_k аффинного пространства \mathbb{A} тогда и только тогда, когда не содержатся ни в каком $(k - 1)$ -мерном аффинном подпространстве, когда векторы $\overline{p_0p_1}, \overline{p_0p_2}, \dots, \overline{p_0p_k}$ линейно независимы, и в этом случае через точки p_0, p_1, \dots, p_k проходит единственное k -мерное аффинное подпространство.

Доказательство. Линейная зависимость k векторов $\overline{p_0p_i}$ равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше $k - 1$. Это в свою очередь означает, что в V найдётся $(k - 1)$ -мерное векторное подпространство U , содержащее все векторы $\overline{p_0p_i}$. Последнее равносильно тому, что $(k - 1)$ -мерное аффинное подпространство $p_0 + U$ содержит все точки p_i . Если векторы $\overline{p_0p_i}$ линейно независимы, то они составляют базис в любом содержащем их k -мерном векторном подпространстве $U \subset V$, и значит, любое такое подпространство совпадает с их линейной оболочкой. Поскольку прохождение аффинного пространства $p_0 + U$ через все точки p_i равносильно тому, что все векторы $\overline{p_0p_i}$ лежат в U , мы заключаем, что такое пространство $p_0 + U$ ровно одно и его направляющее векторное пространство U представляет собою линейную оболочку векторов $\overline{p_0p_i}$. \square

Пример 4.6 (Аффинный репер)

В n -мерном аффинном пространстве \mathbb{A}^n над векторным пространством V каждый набор из $n + 1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек p_0, p_1, \dots, p_n задаёт систему аффинных координат с началом в точке p_0 и базисными векторами $e_i = \overline{p_0p_i} \in V$ в том смысле, что точки $q \in \mathbb{A}^n$ оказываются в биекции с наборами таких чисел (x_1, \dots, x_n) , что

$$\overline{p_0q} = x_1 \cdot \overline{p_0p_1} + x_2 \cdot \overline{p_0p_2} + \dots + x_n \cdot \overline{p_0p_n}.$$

В самом деле, по определению аффинного пространства, сопоставление точке $q \in \mathbb{A}^n$ вектора $\overline{p_0q} \in V$ задаёт биекцию между точками и векторами. Так как точки p_i не лежат в одной гиперплоскости, n векторов e_i линейно независимы и составляют базис в V . Сопоставление вектору его координат в этом базисе задаёт линейную биекцию $V \simeq \mathbb{K}^n$.

4.4. Линейные и аффинные отображения. С каждым линейным отображением векторных пространств $F : V \rightarrow W$ связаны его *ядро* $\ker F \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$ и *образ* $\text{im } F \stackrel{\text{def}}{=} F(V) \subset W$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.7. Убедитесь, что $\ker F \subset V$ и $\text{im } F \subset W$ являются векторными подпространствами.

Поскольку равенства $F(v_1) = F(v_2)$ и $F(v_1 - v_2) = 0$ для линейного отображения F эквивалентны друг другу, два вектора $v_1, v_2 \in V$ тогда и только тогда переводятся отображением F в один и тот же вектор $w = F(v_1) = F(v_2) \in \text{im } F$, когда $v_1 - v_2 \in \ker F$. Иными словами, полный прообраз $F^{-1}(w)$ любого вектора $w \in \text{im } F$ либо пуст, либо является *параллельным сдвигом* векторного подпространства $\ker F$ на произвольный вектор $v \in F^{-1}(w)$:

$$F^{-1}(F(v)) = v + \ker F. \quad (4-4)$$

В частности, мы получаем

Предложение 4.5

Линейное отображение F инъективно тогда и только тогда, когда $\ker F = 0$. □

Следствие 4.7

Линейное отображение F инъективно если и только если оно переводит линейно независимые наборы векторов в линейно независимые.

Доказательство. Если F не инъективен, то $\ker F$ содержит ненулевой вектор u , и линейно независимый набор, состоящий из одного этого вектора, перейдёт в линейно зависимый набор, состоящий из нулевого вектора. Если $\ker F = 0$, то равенство $0 = \lambda_1 F(u_1) + \dots + \lambda_k F(u_k) = F(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k)$ означает, что вектор $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in \ker F$ нулевой, т. е. векторы $F(u_i)$ могут быть линейно зависимы только когда сами векторы u_i линейно зависимы. □

Предложение 4.6

Если V конечномерно, то для любого линейного отображения $F : V \rightarrow W$

$$\dim \ker F + \dim \text{im } F = \dim V. \quad (4-5)$$

Доказательство. Выберем базис $u_1, \dots, u_k \in \ker F$, дополним его векторами e_1, e_2, \dots, e_m до базиса в V и покажем, что векторы $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_m)$ образуют базис в $\text{im } F$. Они порождают образ, т. к. для любого вектора $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j \in V$

$$F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j).$$

Они линейно независимы, поскольку равенство $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$ означает, что $\sum \lambda_i e_i$ лежит в $\ker F$, т. е. является линейной комбинацией векторов u_i , что возможно только когда все $\lambda_i = 0$. □

Следствие 4.8

Следующие свойства линейного отображения $F : V \rightarrow V$ из пространства V в себя эквивалентны друг другу: (1) F изоморфизм (2) $\ker F = 0$ (3) $\text{im } F = V$.

Доказательство. Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по [предл. 4.6](#), а их одновременное выполнение равносильно (1) по [предл. 4.5](#). \square

ПРИМЕР 4.7 (ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ, ПРОДОЛЖЕНИЕ [ПРИМ. 4.2](#))

Зафиксируем, как и в [прим. 4.2](#) на стр. 50, несколько различных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{k}$, однако теперь зададим для каждого числа a_i несколько произвольных значений $b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{im_i} \in \mathbb{k}$. Пусть общее число заданных значений $(m_1 + 1) + \dots + (m_n + 1) = m + 1$. Покажем, что существует единственный такой многочлен $g \in \mathbb{k}[x]$ степени не выше m , что при каждом i сам этот многочлен и первые его m_i производных принимают в точке a_i заданные $m_i + 1$ значений

$$g(a_i) = b_{i0}, \quad g'(a_i) = b_{i1}, \quad g''(a_i) = b_{i2}, \quad \dots, \quad g^{(m_i)}(a_i) = b_{im_i},$$

где $g^{(k)}(x) = d^k g(x)/dx^k$ означает k -ю производную от многочлена g . Для этого произвольным образом занумеруем $m + 1$ пар чисел (i, j) с $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m_i$ и выпишем их в одну строчку в порядке возрастания номеров. Рассмотрим отображение $F: \mathbb{k}[x]_{\leq m} \rightarrow \mathbb{k}^{m+1}$, переводящее каждый многочлен g степени $\deg g \leq m$ в набор значений¹ $g^{(j)}(a_i)$, записанных в строчку согласно зафиксированному только что порядку на множестве индексов (i, j) .

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Убедитесь, что отображение F линейно и $\ker F = 0$.

Так как $\dim \operatorname{im} F = \dim \mathbb{k}[x]_{\leq m} = \dim \mathbb{k}^{m+1}$, мы заключаем, что отображение F биективно, что и требовалось.

ПРИМЕР 4.8 (ПРОЕКЦИИ)

С каждой парой дополнительных подпространств² $U, W \subset V = U \oplus W$ связаны сюръективные линейные отображения $\pi_U: V \rightarrow U, u + w \mapsto u$, и $\pi_W: V \rightarrow W, u + w \mapsto w$, которые называются *проекциями* пространства V , соответственно, на подпространство U вдоль подпространства W и на подпространство W вдоль подпространства U . Первая из них имеет $\ker \pi_U = W$ и тождественно действует на U , а вторая имеет $\ker \pi_W = U$ и тождественно действует на W . Проекции π_U и π_W , рассматриваемые как линейные эндоморфизмы $V \rightarrow V$, удовлетворяют соотношениям $\pi_U \pi_W = \pi_W \pi_U = 0, \pi_U + \pi_W = \operatorname{Id}_V, \pi_U \circ \pi_U = \pi_U, \pi_W \circ \pi_W = \pi_W$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Покажите, что если линейный эндоморфизм $F: V \rightarrow V$ удовлетворяет соотношению $F^2 = F$, то $V = \ker F \oplus \operatorname{im} F$, и F является проекцией V на $\operatorname{im} F$ вдоль $\ker F$, а оператор $G = \operatorname{Id}_V - F$ тоже удовлетворяет соотношению³ $G^2 = G$ и является проекцией V на $\ker F$ вдоль $\operatorname{im} F$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7

Пусть векторы e_1, \dots, e_n образуют базис векторного пространства V . Тогда для любого векторного пространства W и любого набора из n векторов $w_1, \dots, w_n \in W$ существует единственное такое линейное отображение $F: V \rightarrow W$, что $F(e_i) = w_i$ для всех i .

Доказательство. Если такое отображение F существует, то в силу линейности оно действует на произвольный вектор $v = \sum x_i e_i \in V$ по правилу $F(v) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i w_i$ и, тем самым, единственно. С другой стороны, для любого набора векторов $w_1, \dots, w_n \in W$ отображение

$$F: V \rightarrow W, \quad x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto x_1 w_1 + \dots + x_n w_n,$$

¹ Где для единообразия обозначений мы полагаем $g^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} g$.

² Напомню, что это означает, что $V = U \oplus W$, т. е. $U + W = V$ и $U \cap W = 0$, см. [сл. 4.5](#) на стр. 53.

³ А также соотношениям $GF = FG = 0$.

очевидно линейно и при каждом i переводит e_i в w_i . \square

Следствие 4.9

Для любого набора из $n + 1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек p_0, p_1, \dots, p_n в n -мерном аффинном пространстве A и произвольного набора из $n + 1$ точек q_0, q_1, \dots, q_n любого аффинного пространства B существует единственное такое аффинное отображение¹ $\varphi : A \rightarrow B$, что $\varphi(p_i) = q_i$ при всех i .

Доказательство. Обозначим через U и W векторные пространства, ассоциированные с аффинными пространствами A и B . Если отображение φ существует, то его дифференциал² $D_\varphi : U \rightarrow W$ переводит n векторов $\overline{p_0 p_i}$, составляющих базис векторного пространства U , в заданные n векторов $\overline{q_0 q_i} \in W$. По предл. 4.7 такое линейное отображение D_φ существует, единственно и переводит вектор $u = \sum x_i \cdot \overline{p_0 p_i}$ в вектор $D_\varphi(u) = \sum x_i \cdot \overline{q_0 q_i}$. Поэтому аффинное отображение φ тоже существует, единственно и переводит точку $a = p_0 + \sum x_i \cdot \overline{p_0 p_i}$ в точку $\varphi(a) = q_0 + \sum x_i \cdot \overline{q_0 q_i}$. \square

Следствие 4.10

Аффинное отображение из n -мерного аффинного пространства в себя биективно если и только если оно переводит какие-нибудь $n + 1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек в точки, также не лежащие в одной гиперплоскости. Для любых двух упорядоченных наборов из $n + 1$ точек, в каждом из которых точки не лежат в одной гиперплоскости, существует единственное биективное аффинное преобразование, переводящее первый набор во второй.

Доказательство. Аффинное отображение биективно если и только если биективен его дифференциал. Дифференциал биективен если и только если он переводит базис в базис. Векторы, соединяющие одну из $n + 1$ точек со всеми остальными, образуют базис если и только если эти $n + 1$ точек не лежат в одной гиперплоскости. \square

4.5. Фактор пространства. Рассмотрим произвольное векторное пространство V и зафиксируем в нём некоторое подпространство $U \subset V$. Проходящее через точку $v \in \mathbb{A}(V)$ аффинное подпространство $v + U$ с направляющим подпространством U можно трактовать как класс эквивалентности вектора v по модулю сдвигов на векторы из подпространства U . Такой класс обычно обозначают через $[v]_U = v \pmod{U} = \{w \in V \mid w - v \in U\}$ и называют *классом вычетов* вектора v по модулю U . На множестве классов вычетов имеется естественная структура векторного пространства, в котором сложение и умножение на числа наследуются из V и задаются правилами $[v]_U + [w]_U \stackrel{\text{def}}{=} [v + w]$ и $\lambda[v]_U \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda v]$.

Упражнение 4.10. Проверьте, что эти определения корректны и задают на множестве классов структуру векторного пространства над полем \mathbb{k} .

Пространство классов вычетов по модулю подпространства U обозначается V/U и называется *фактор пространством* пространства V по подпространству U . Повторю, что на геометрическом языке векторами фактор пространства V/U являются всевозможные аффинные подпространства в $\mathbb{A}(V)$ с заданным направляющим подпространством $U \subset V$.

Линейное сюръективное отображение $V \twoheadrightarrow V/U, v \mapsto [v]$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в содержащий его класс $[v]$, называется *отображением факторизации*.

¹См. н° 2.2 на стр. 24.

²См. н° 2.2.1 на стр. 25.

ПРИМЕР 4.9 (ФАКТОР ПО ЯДРУ)

Каждое линейное отображение $F : V \rightarrow W$ задаёт изоморфизм $V/\ker F \simeq \operatorname{im} F$, сопоставляющий классу $[v] \in V/\ker F$ вектор $F(v) \in \operatorname{im} F$. Это переформулировка того, что

$$F(v) = F(w) \iff v - w \in \ker F$$

(ср. с форм. (4-4) на стр. 55).

ПРИМЕР 4.10 (ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА КАК ФАКТОР)

Линейная оболочка $W = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_m) \subset V$ произвольного набора из m векторов w_m векторного пространства V является образом линейного отображения $F : \mathbb{k}^m \rightarrow V$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \mathbb{k}^m$ в вектор $w_i \in W$. Ядро этого отображения $U = \ker F \subset \mathbb{k}^m$ представляет собою *пространство линейных соотношений* между образующими векторами w_i пространства W в том смысле, что вектор

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m \in \mathbb{k}^m$$

лежит в U тогда и только тогда, когда $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m = 0$ в W . Изоморфизм

$$W = \operatorname{im} F \simeq \mathbb{k}^m / U$$

из предыдущего [прим. 4.9](#) в данном случае утверждает, что векторы $w \in W$ можно трактовать как классы вычетов всевозможных формальных линейных комбинаций $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$ по модулю тех комбинаций, что являются линейными зависимостями между векторами w_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8

Если векторы v_1, v_2, \dots, v_k дополняют некоторый базис u_1, u_2, \dots, u_m подпространства $U \subset V$ до базиса во всём пространстве V , то классы $[v_1], [v_2], \dots, [v_k]$ их вычетов по модулю U образуют базис фактор пространства V/U . В частности, $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из [предл. 4.6](#) на стр. 55 и его доказательства, применённых к линейному отображению факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$. Повторим проведённое там рассуждение ещё раз на языке классов вычетов. Классы $[v_i]$ линейно независимы в V/U , поскольку наличие для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{k}$ равенства $\lambda_1 [v_1] + \lambda_2 [v_2] + \dots + \lambda_k [v_k] = [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k] = [0]$ в пространстве V/U означает, что для некоторых $\mu_j \in \mathbb{k}$ в пространстве V выполняется равенство $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m$, возможное только когда все $\lambda_i = 0$ и все $\mu_j = 0$. Классы $[v_i]$ линейно порождают V/U , поскольку для любого вектора

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m \in V$$

класс $[v] = [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k] = \lambda_1 [v_1] + \lambda_2 [v_2] + \dots + \lambda_k [v_k]$ в V/U . □

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. См. стр. 28 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf>.

Упр. 4.4. Пусть $\mathbb{k}^n = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$, где гиперплоскость $U = \text{Ann } \xi_i \subset \mathbb{k}^n$ задаётся линейным уравнением $\xi_i(x_1, \dots, x_n) = \xi_{i1}x_1 + \xi_{i2}x_2 + \dots + \xi_{in}x_n = 0$. Произведение всех линейных форм $\xi_i(x_1, \dots, x_n)$ является ненулевым многочленом m -й степени от x_1, x_2, \dots, x_n , но при этом задаёт тождественно нулевую функцию $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$. Индукцией по n покажите, что над бесконечным такое невозможно.

Упр. 4.5. Пусть $W \not\subset U$ два подпространства в V . Выберем вектор $w \in W \setminus U$. Если $W \cup U$ — подпространство, то $\forall u \in U \quad w + u \in W \cup U$. Поскольку $w + u \notin U$ (т. к. $w \notin U$), $w + u \in W$, откуда $u \in W$, т. е. $U \subset W$.

Упр. 4.7. Поскольку $\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$, любая линейная комбинация векторов из образа лежит в образе, а векторов из ядра — в ядре. Так как $F(\vec{0}) = F(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot F(\vec{0}) = 0$, ядро содержит нулевой вектор. Образ содержит нулевой вектор, поскольку $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$, откуда $0 = F(0)$.

Упр. 4.8. Линейность F вытекает из того, что отображение дифференцирования

$$d/dx : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}[x], \quad g \mapsto g',$$

и все отображения вычисления $\text{ev}_a : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}, g \mapsto g(a)$, где $a \in \mathbb{k}$, линейны и композиция линейных отображений тоже линейна. Если $g \in \ker F$, то каждое число $a_i \in \mathbb{k}$ является как минимум $(m_i + 1)$ -кратным корнем многочлена g , и g делится на $\prod_i (x - a_i)^{m_i + 1}$, что невозможно при $g \neq 0$, поскольку степень этого произведения равна $m + 1 > \deg g$.

Упр. 4.9. Если $F^2 = F$, то для любого вектора $v \in V$ вектор $v - F(v) \in \ker F$, ибо $F(v - F(v)) = F(v) - F^2(v) = 0$. Тем самым $\text{im } F + \ker F = V$. Если $v = F(w) \in \ker F \cap \text{im } F$, то $v = F(w) = F^2(w) = F(v) = 0$. Тем самым, $V = \ker F \oplus \text{im } F$. Предыдущая выкладка показывает, что F тождественно действует на $\text{im } F$. Тем самым, $F(u + w) = w$ для любых $u \in \ker F, w \in \text{im } F$.

Упр. 4.10. Если $v_1 = v_2 + u$ и $w_1 = w_2 + u'$, где $u, u' \in U$, то $v_1 + w_1 = (v_2 + w_2) + (u + u')$ и $\lambda v_1 = \lambda v_2 + \lambda u$. Выполнение аксиом векторного пространства наследуется из V .