§3. Евклидова плоскость

Этот параграф посвящён метрической геометрии. Мы определим *длины* и *углы* — величины, по природе своей являющиеся *действительными числами* и характеризующиеся специфическими для поля $\mathbb{R}$ отношениями больше – меньше или ближе – дальше. Поэтому всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Определение 3.1

Скалярным произведением (или *евклидовой структурой*) на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ называется симметричная билинейная положительная функция $V \times V \to \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой паре векторов $u, w \in V$ число $(v, w) \in \mathbb{R}$. При этом *симметричность* означает, что $(u, w) = (w, u)$ для всех $u, w \in V$, *билинейность* — что

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \lambda_1\mu_1(u_1, w_1) + \lambda_1\mu_2(u_1, w_2) + \lambda_2\mu_1(u_2, w_1) + \lambda_2\mu_2(u_2, w_2)\,,$$

а *положительность* — что $(v, v) > 0$ для всех ненулевых векторов $v \in V$.

Пример 3.1 (стандартная евклидова структура на $\mathbb{R}^n$)

Скалярное произведение векторов $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ координатного пространства $\mathbb{R}^n$, заданное формулой $(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, называется *стандартным*.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что это скалярное произведение билинейно, симметрично и положительно.

3.1. Длина вектора и перпендикулярность. Неотрицательное число $|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$ называется *длиной* вектора v евклидова пространства V. Все ненулевые векторы имеют строго положительную длину и $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$. Скалярное произведение $V \times V \to \mathbb{R}$ однозначно восстанавливается по функции длины $V \to \mathbb{R}$ как

$$(u, w) = \big(|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2\big)/2\,. \tag{3-1}$$

Векторы $a, b \in V$ называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, если $(a, b) = 0$. Если a и b перпендикулярны, то квадрат длины вектора $c = b - a$, соединяющего их концы, выражается через квадраты длин векторов a и b по *теореме Пифагора* (см. рис. 3◇1):

$$|c|^2 = (c, c) = (b - a, b - a) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2\,. \tag{3-2}$$

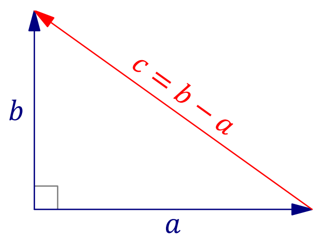

Рис. 3◇1. Теорема Пифагора.

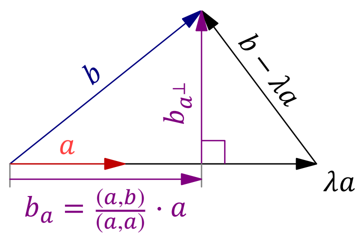

Рис. 3◇2. Ортогональная проекция b на a.

Предложение 3.1
Во всяком евклидовом пространстве для любого ненулевого вектора a и произвольного вектора b существует единственная пара таких векторов b_a и $b_{a^\perp}$, что b_a пропорционален a, $b_{a^\perp}$ перпендикулярен a, и $b = b_a + b_{a^\perp}$ (см. рис. 3◇2). Эти векторы выражаются через a и b как

$$b_a = \frac{(a,b)}{(a,a)}\,a \quad \text{и} \quad b_{a^\perp} = b - \frac{(a,b)}{(a,a)}\,a\,, \tag{3-3}$$

причём $b_{a^\perp} = 0$ если и только если a и b пропорциональны, а $b_a = 0$ если и только если b перпендикулярен a.

Доказательство. Мы ищем такие векторы $b_a = \lambda a$ и $b_{a^\perp} = b - \lambda a$, что

$$(a, b_{a^\perp}) = (a, b - \lambda a) = (a,b) - \lambda\,(a,a) = 0\,.$$

Так как $(a,a) \neq 0$, это равенство выполняется при единственном $\lambda = (a,b)/(a,a)$. При таком λ условие $b_a = \lambda a = 0$ равносильно равенству $(a,b) = 0$. Условие $b_{a^\perp} = b - \lambda a = 0$ означает пропорциональность векторов a и b. □

Определение 3.2
Векторы b_a и $b_{a^\perp}$ из предл. 3.1, называются соответственно *ортогональной проекцией* вектора b на одномерное подпространство $\mathbb{R} \cdot a$, порождённое вектором a, и *нормальной составляющей* вектора b относительно a.

Упражнение 3.2. Убедитесь, что векторы b_a и $b_{a^\perp}$ не меняются при замене вектора a на пропорциональный вектор λa с $\lambda \neq 0$.

Следствие 3.1 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца)
Для любых двух векторов a, b евклидова пространства выполняется неравенство

$$|(a,b)| \leqslant |a| \cdot |b|\,, \tag{3-4}$$

которое обращается в равенство если и только если векторы a и b пропорциональны.

Доказательство. Если $a = b = 0$, обе части неравенства нулевые. Если $a \neq 0$, то определена нормальная составляющая $b_{a^\perp}$ вектора b относительно a, и её скалярный квадрат

$$(b_{a^\perp}, b_{a^\perp}) = (b,b) - (a,b)^2/(a,a) \geqslant 0 \tag{3-5}$$

зануляется если и только если b пропорционален a. Домножая обе части (3-5) на (a,a), получаем $(b,b)(a,a) \geqslant (a,b)^2$, что равносильно (3-4). □

Пример 3.2 (неравенство Коши – Буняковского для чисел)
Неравенство (3-4) применительно к векторам евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ из прим. 3.1 утверждает, что для любых двух наборов вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ выполняется неравенство $(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\cdot(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$, обращающееся в равенство если и только если эти наборы чисел пропорциональны.

Следствие 3.2 (неравенство треугольника)
Для любых двух векторов a, b евклидова пространства выполняется *неравенство треугольника*[1]

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \tag{3-6}$$

(см. рис. 3◇3). Оно обращается в равенство если и только если векторы a и b *сонаправлены*, т. е. один получается из другого умножением на *неотрицательное* число.

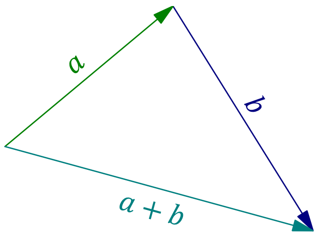

Рис. 3◇3. Неравенство треугольника.

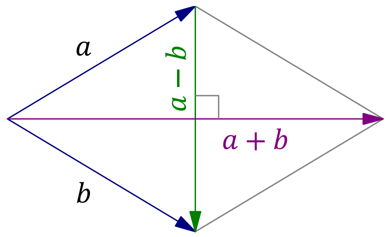

Рис. 3◇4. Диагонали ромба.

Доказательство. Возводя обе части неравенства $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ в квадрат, получаем эквивалентное неравенство $(a+b, a+b) \leqslant (a,a) + 2\,|a| \cdot |b| + (b,b)$, которое после раскрытия скобок в левой части и очевидных сокращений превращается в неравенство $(a,b) \leqslant |a| \cdot |b|$, отличающееся от неравенства (3-4) отсутствием модуля в левой части. При $(a,b) < 0$ оно заведомо выполняется в строгой форме. При $(a,b) \geqslant 0$ оно выполняется по сл. 3.1 и превращается в равенство если и только если $b = \lambda a$, где $\lambda \geqslant 0$, так как $(a,b) \geqslant 0$. □

Упражнение 3.3. Проверьте, что диагонали ромба перпендикулярны, т. е. $(a+b, a-b) = 0$ для любых двух векторов a, b одинаковой длины $|a| = |b|$, см. рис. 3◇4.

3.1.1. Расстояние между точками. Аффинные пространства над евклидовыми векторными пространствами также называются *евклидовыми*. Длина $|\overrightarrow{ab}|$ вектора $\overrightarrow{ab}$, соединяющего точки a и b такого пространства, называется *расстоянием* между a и b и обозначается $|a,b|$ или $|b-a|$. Обратите внимание, что $|b-a| = |a-b|$, так же как и $|a,b| = |b,a|$. Неравенство треугольника (3-6) на языке точек означает, что для любых трёх точек a, b, p выполняется неравенство $|p-a| + |b-p| \geqslant |b-a|$, которое обращается в равенство если и только если векторы $\overrightarrow{ap}$ и $\overrightarrow{pb}$ сонаправлены. Последнее равносильно тому, что точка p является барицентрической комбинацией[2] точек a и b с *неотрицательными* весами.

Упражнение 3.4. Убедитесь в этом.

В вещественном аффинном пространстве множество всех неотрицательных барицентрических комбинаций двух различных точек $a \neq b$ называется *отрезком* и обозначается

$$[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \geqslant 0 \text{ и } \alpha + \beta = 1\}.$$

Мы заключаем, что в евклидовом аффинном пространстве отрезок $[a,b]$ представляет собою ГМТ x, удовлетворяющих равенству $|a-x| + |x-b| = |a-b|$.

[1] Чем, собственно, и оправдывается термин «длина».
[2] См. n° 1.5 на стр. 16.

3.1.2. Перпендикулярные прямые. Две прямые в евклидовом пространстве называются *перпендикулярными*, если перпендикулярны их векторы скоростей.

Предложение 3.2 (ортогональная проекция точки на прямую)
Для любых прямой ℓ и точки $p \notin \ell$ следующие два условия на точку $q \in \ell$ эквивалентны:

1) $|x - p| > |q - p|$ для всех отличных от q точек $x \in \ell$

2) прямая (pq) перпендикулярна прямой ℓ.

Точка $q \in \ell$ с такими свойствами существует и единственна[1].

Доказательство. Пусть прямая ℓ задаётся параметрическим уравнением $o + tv$, где t пробегает $\mathbb{R}$, $o \in \ell$ — произвольно зафиксированная точка, v — вектор скорости прямой ℓ. Точка $q \in \ell$, удовлетворяющая условию (1) очевидно единственна, если существует. С другой стороны, по предл. 3.1, применённому к векторам $a = v$ и $b = \overrightarrow{op}$, на прямой ℓ есть единственная такая точка $q \in \ell$, что векторы v и $\overrightarrow{qp}$ перпендикулярны, см. рис. 3◇5. Тем самым, условие (2) выполняется для единственной точки $q \in \ell$. При этом для любой отличной от неё точки $x \in \ell$ по теореме Пифагора $|\overrightarrow{px}|^2 = |\overrightarrow{pq}|^2 + |\overrightarrow{qx}|^2 > |\overrightarrow{pq}|^2$, откуда $|x - p| > |q - p|$. Тем самым, эта точка q одновременно удовлетворяет и условию (1). □

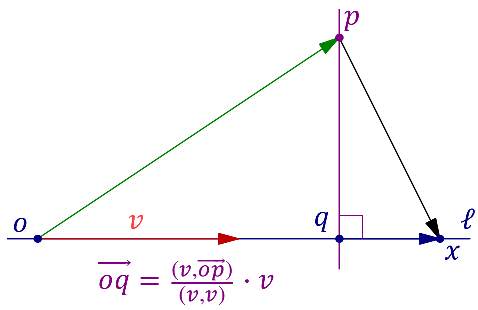

Рис. 3◇5.

Упражнение 3.5. Покажите, что на евклидовой плоскости через любую точку p проходит единственная прямая, перпендикулярная произвольно заданной прямой ℓ.

3.2. Ортонормальные базисы. Векторы единичной длины принято называть *единичными*. Базис двумерного евклидова векторного пространства называется *ортонормальным*, если он состоит из двух перпендикулярных единичных векторов. С любой парой непропорциональных векторов a, b можно связать ортонормальный базис из векторов

$$e_1 = a/|a| \quad \text{и} \quad e_2 = b_{a^\perp}/|b_{a^\perp}|,$$

где $b_{a^\perp} = b - a \cdot (a,b)/(a,a)$ — ортогональная проекция[2] вектора b на вектор a. Таким образом, на любой евклидовой плоскости есть ортонормальный базис.

Упражнение 3.6. Покажите, что каждый единичный вектор e на евклидовой плоскости включается ровно в два ортонормальных базиса (e, f) и $(e, -f)$, отличающиеся друг от друга ориентацией.

Предложение 3.3
Координаты вектора $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ в ортонормальном базисе e_1, e_2 равны его скалярным произведениям с базисными векторами: $x_1 = (u, e_1)$, $x_2 = (u, e_2)$, а скалярное произведение векторов $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ и $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$ вычисляется как в прим. 3.1 на стр. 33, т. е. $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

[1] Она называется *ортогональной проекцией* точки p на прямую ℓ.
[2] См. опр. 3.2 на стр. 34.

Доказательство. Первое утверждение доказывается скалярным умножением обеих частей равенства[1] $u = x_1e_1 + x_2e_2$ на векторы e_1 и e_2, второе — бесхитростным раскрытием скобок в выражении $(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2)$. □

Пример 3.3 (уравнение прямой на евклидовой плоскости)
В координатах (x_1, x_2) относительно ортонормального базиса уравнение

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = c \tag{3-7}$$

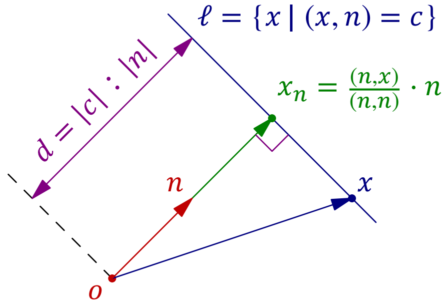

Рис. 3⋄6. Пямая $(n, x) = c$.

Задаёт прямую, перпендикулярную вектору $n = (\alpha_1, \alpha_2)$ и расположенную на расстоянии $|c| / |n|$ от начала координат в направлении этого вектора при $c > 0$ и в противоположном направлении при $c < 0$. Действительно, соотношение (3-7) означает, что скалярное произведение переменного вектора $x = (x_1, x_2)$ с фиксированным вектором n постоянно и равно $(n, x) = c$, т. е. прямая (3-7) заметается концами всех векторов x, имеющих заданную ортогональную проекцию $x_n = n \cdot (x, n)/(n, n) = n \cdot c/|n|^2$ на вектор n, см. рис. 3⋄6. Длина этой проекции равна $\sqrt{(x_n, x_n)} = |c| / |n|$, а её направление определяется знаком константы c: при $c > 0$ проекция сонаправлена с n, а при $c < 0$ — противоположно направлена. При $c = 0$ прямая (3-7) проходит через начало координат. К примеру, *срединный перпендикуляр* к отрезку $[a, b]$, т. е. прямая перпендикулярная вектору $a - b$ и проходящая через точку $(a + b) / 2$, задаётся уравнением

$$(a - b, x) = (a - b, a + b)/2 = \left(|a|^2 - |b|^2\right)/2\,. \tag{3-8}$$

Две прямые $(n, x) = c_1$ и $(n, x) = c_2$, перпендикулярные одному и тому же вектору n удалены друг от друга на расстояние $|c_1 - c_2|/|n|$. В частности, расстояние от заданной точки a до прямой $(n, x) = c$, равное расстоянию от этой прямой до параллельной ей и проходящей через точку a прямой $(n, x) = (n, a)$, можно вычислять как $|c - (n, a)| / |n|$.

Упражнение 3.7. Покажите, что биссектрисы углов, возникающих при пересечении прямых $(n_1, x) = c_1$ и $(n_2, x) = c_2$, задаются уравнениями $|n_2| \cdot \left(c_1 - (n_1, x)\right) = \pm|n_1| \cdot \left(c_2 - (n_2, x)\right)$ и перпендикулярны друг другу.

Предложение 3.4 (определитель Грама)
Если векторы e_1, e_2 составляют ортонормальный базис евклидова пространства V, то для любых векторов $u, w \in V$ и любой ненулевой функции площади $s : V \times V \to \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\frac{s^2(u,w)}{s^2(e_1,e_2)} = \det\begin{pmatrix}(u,u) & (u,w)\\(w,u) & (w,w)\end{pmatrix}$$

(определитель в правой части называется *определителем Грама* векторов u, w).

Доказательство. Пусть $u = x_1e_1 + x_2e_2$, $w = y_1e_1 + y_2e_2$. Тогда по сл. 1.2 на стр. 13

$$s(u, w)/s(u, w) = \det(u, w) = x_1y_2 - x_2y_1\,.$$

[1] Ср. с доказательством лем. 1.2 на стр. 11.

С другой стороны, $(u,u)\cdot(w,w)-(u,w)^2 = (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2 = (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2\,x_1y_1x_2y_2 = (x_1y_2-x_2y_1)^2$. □

Упражнение 3.8. Выведите из предл. 3.4 другое доказательство неравенства Коши – Буняковского – Шварца (3-4).

3.2.1. Евклидова площадь. Из предл. 3.4 вытекает, что для любых двух ортонормальных базисов (e_1', e_2') и (e_1'', e_2'') на евклидовой плоскости и любой ненулевой формы площади s отношение

$$\frac{s^2(e_1'', e_2'')}{s^2(e_1', e_2')} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1\,,$$

откуда $s(e_1'', e_2'') = \pm s(e_1', e_2')$, т. е. все ортонормальные базисы имеют равную по абсолютной величине площадь. Функция площади s на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ называется *евклидовой*, если $s(e_1, e_2) = 1$ для стандартного ортонормального базиса $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Всюду далее обозначения $s(u,v)$ и $s(abc)$ применительно в евклидову пространству $\mathbb{R}^2$ по умолчанию означают именно евклидову площадь. Ортонормальные базисы площади 1 называются *положительно ориентированными*, а площади -1 — *отрицательно ориентированными*.

Упражнение 3.9. Убедитесь, что $|\det(a,b)| = |a|\cdot|b_{a^\perp}|$, т. е. модуль евклидовой площади параллелограмма равен произведению длин основания и опущенной на него высоты.

3.3. Углы и тригонометрия.

Пусть векторы $e, e^\perp$ составляют положительно ориентированный ортонормальный базис. Коэффициенты x, y разложения $f = x\cdot e + y\cdot e^\perp$ произвольного единичного вектора f по этому базису удовлетворяют соотношению $x^2+y^2 = 1$ и лежат на отрезке $[-1,1]$. Следовательно, существует такое число $\alpha\in\mathbb{R}$, что $x = \cos\alpha$ и $y = \sin\alpha$, причём любые два числа α', α'' с этим свойством различаются на целое число оборотов по единичной окружности, т. е. $\alpha' - \alpha'' = 2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$, см. рис. 3⋄7. Множество всех таких чисел называется *ориентированным углом* между единичными векторами e и f и обозначается

$$\measuredangle(e,f) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha\in\mathbb{R} \mid f = e\cdot\cos\alpha + e^\perp\cdot\sin\alpha\}\,. \tag{3-9}$$

Функции $\cos t$ и $\sin t$ принимают на всех числах из $\measuredangle(e,f)$ одни и те же значения, которые мы будем записывать как $\cos\measuredangle(e,f)$ и $\sin\measuredangle(e,f)$. Таким образом, для любого положительно ориентированного ортонормального базиса $e, e^\perp$ и любого единичного вектора f выполняются соотношения[1]

$$\begin{aligned} f &= e\cdot\cos\measuredangle(e,f) + e^\perp\cdot\sin\measuredangle(e,f)\\ \cos\measuredangle(e,f) &= (e,f) = s(f,e^\perp)\\ \sin\measuredangle(e,f) &= s(e,f) = (e^\perp,f)\end{aligned} \tag{3-10}$$

Обратите внимание, что $(e,f) = (f,e)$ и $s(e,f) = -s(f,e)$, откуда $\cos\measuredangle(e,f) = \cos\measuredangle(f,e)$, $\sin\measuredangle(e,f) = -\sin\measuredangle(f,e)$. Тем самым, $\measuredangle(e,f) = -\measuredangle(f,e)$, т. е. углы, откладываемые против часовой стрелки считаются со знаком «+», а по часовой — со знаком «–».

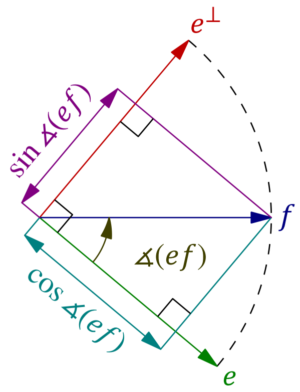

Рис. 3⋄7.

Упражнение 3.10. Убедитесь, что единичный вектор $f = x\cdot e + y\cdot e^\perp$ дополняется до положительно ориентированного ортонормального базиса $f, f^\perp$ вектором $f^\perp = -ye + xe^\perp$ и выведите отсюда соотношения $\cos\measuredangle(e,f^\perp) = -\sin\measuredangle(e,f)$ и $\sin\measuredangle(e,f^\perp) = \cos\measuredangle(e,f)$.

[1] Вторая и третья строки вычисляют коэффициенты написанного в первой строке разложения по формулам из лем. 1.2 на стр. 11 и предл. 3.3 на стр. 36.

Раскладывая по ортонормальному базису $f, f^\perp$ произвольный единичный вектор

$$g = f \cdot \cos(\measuredangle(f,g)) + f^\perp \cdot \sin(\measuredangle(f,g))$$

и подставляя сюда разложения векторов $f, f^\perp$ по базису $e, e^\perp$, получаем в матричных обозначениях из n° 2.3 на стр. 26 равенство

$$\begin{aligned}(e,e^\perp)\cdot\begin{pmatrix}\cos\measuredangle(e,g)\\ \sin\measuredangle(e,g)\end{pmatrix} &= g = (f,f^\perp)\cdot\begin{pmatrix}\cos\measuredangle(f,g)\\ \sin\measuredangle(f,g)\end{pmatrix} = \\ &= (e,e^\perp)\cdot\begin{pmatrix}\cos\measuredangle(e,f) & -\sin\measuredangle(e,f)\\ \sin\measuredangle(e,f) & \cos\measuredangle(e,f)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\measuredangle(f,g)\\ \sin\measuredangle(f,g)\end{pmatrix} = \\ &= (e,e^\perp)\cdot\begin{pmatrix}\cos\measuredangle(e,f)\cdot\cos\measuredangle(f,g)-\sin\measuredangle(e,f)\cdot\sin\measuredangle(f,g)\\ \cos\measuredangle(e,f)\cdot\sin\measuredangle(f,g)+\sin\measuredangle(e,f)\cdot\cos\measuredangle(f,g)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Тем самым, для любой тройки единичных векторов e, f, g

$$\begin{aligned}\cos\measuredangle(e,g) &= \cos\measuredangle(e,f)\cdot\cos\measuredangle(f,g)-\sin\measuredangle(e,f)\cdot\sin\measuredangle(f,g)\\ \sin\measuredangle(e,g) &= \cos\measuredangle(e,f)\cdot\sin\measuredangle(f,g)+\sin\measuredangle(e,f)\cdot\cos\measuredangle(f,g)\,.\end{aligned} \tag{3-11}$$

Ориентированный угол $\measuredangle(a,b)$ между произвольными векторами a и b определяется как угол между сонаправленными с a и b единичными векторами $a/|a|$ и $b/|b|$. Таким образом

$$\cos\measuredangle(a,b) = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} \quad \text{и} \quad \sin\measuredangle(a,b) = \frac{s(a,b)}{|a|\cdot|b|}\,. \tag{3-12}$$

В частности, мы имеем ориентированную версию школьной формулы для площади:

$$s(a,b) = |a|\cdot|b|\cdot\sin\measuredangle(a,b)\,. \tag{3-13}$$

Упражнение 3.11. Убедитесь, что для любых векторов $u, w \in V$ справедлива евклидова теорема косинусов: $|u+w|^2 = |u|^2 + |w|^2 + 2\cdot|u|\cdot|w|\cdot\cos\measuredangle(u,w)$.

Пример 3.4 (окружности)

ГМТ x, удалённых от данной точки на заданное расстояние ϱ, называется *окружностью* радиуса ϱ с центром c и обозначается $S(\varrho,c)$. Таким образом, точка x с радиус вектором $\overrightarrow{cx} = u$ лежит на окружности $S(\varrho,c)$ если и только если $(u,u) = \varrho^2$. Каждая проходящая через центр прямая с направляющим вектором v длины $|v| = \varrho$ пересекает окружность в точках $c \pm v$, см. рис. 3⋄8. Отрезок с концами в этих точках называется *диаметром*. Поскольку для вектора v длины ϱ и любого вектора u выполняется равенство $(u+v, u-v) = (u,u) - \varrho^2$, точка $x = c + u$ лежит на окружности если и только если $(u+v, u-v) = 0$. Таким образом, окружность $S(\varrho,c)$ представляет собою ГМТ x, из которых её диаметр виден под прямым углом, см. рис. 3⋄8.

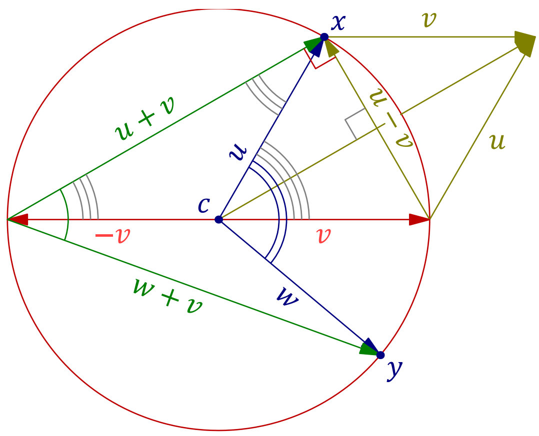

Рис. 3⋄8. Окружность и углы.

Упражнение 3.12. При помощи рис. 3⋄8 покажите, что дуга окружности видна из любой не лежащей на этой дуге точки окружности под вдвое меньшим углом, чем из центра.

3.4. Движения. Отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ евклидовой плоскости в себя называется *движением* или *изометрией*, если оно сохраняет расстояние, т. е. $|p-q| = |f(p) - f(q)|$ для любых двух точек $p, q \in \mathbb{A}^2$. Поскольку каждый отрезок $[a,b]$ представляет собою ГМТ x, для которых[1] $|a-x|+|x-b| = |a-b|$, каждое движение биективно переводит любой отрезок $[a,b]$ в отрезок $[\varphi(a), \varphi(b)]$ той же длины. Тем самым, все движения биективны и переводят прямые в прямые. Поэтому, согласно n° 2.2 на стр. 24, все движения являются аффинными преобразованиями. В частности, каждое движение однозначно определяется своим действием на любой треугольник.

Упражнение 3.13. Докажите школьные признаки конгруэнтности треугольников по трём сторонам, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по двум сторонам и углу между ними[2].

Движения образуют в аффинной группе $\mathrm{Aff}(V)$ подгруппу, которая называется *группой движений* или *группой изометрий* евклидова аффинного пространства $\mathbb{A}(V)$ и обозначается $\mathrm{Isom}\mathbb{A}(V)$. Группа параллельных переносов T, очевидно, содержится в $\mathrm{Isom}\mathbb{A}(V)$.

3.4.1. Линейные ортогональные преобразования. Фиксируем какую-нибудь начальную точку $o \in \mathbb{A}(V)$ и представим движение $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ в виде композиции[3] $\varphi = \tau_v \circ \varphi_o$ параллельного переноса на вектор $v = \overrightarrow{o\varphi(o)}$ и линейного преобразования $\varphi_o : \overrightarrow{ox} \mapsto D_\varphi(\overrightarrow{ox})$, задаваемого дифференциалом $D_\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ движения φ и оставляющего точку o на месте. Поскольку линейное преобразование $\varphi_o = \tau_{-v} \circ \varphi$ тоже является движением, оно сохраняет длины векторов, а следовательно и скалярные произведения: для всех $u, w \in V$ имеем[4] $\big(\varphi(u), \varphi(w)\big) = \big(|\varphi(u+w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2\big)/2 = \big(|u+w|^2 - |u|^2 - |w|^2\big)/2 = (v, w)$. Сохраняющие скалярное произведение линейные преобразования евклидова векторного пространства V называются *ортогональными* или *изометрическими*. Так как ортогональное преобразование переводит ортонормальный базис в ортонормальный, оно сохраняет абсолютную величину евклидовой площади и по предл. 2.4 на стр. 28 имеет определитель ± 1. Ортогональные преобразования определителя $+1$ сохраняют ориентацию и называются *собственными* или *специальными*. Ортогональные преобразования определителя -1 меняют ориентацию и называются *несобственными*.

Пример 3.5 (отражения)

Каждый отличный от нуля вектор $n \in V$ задаёт несобственное ортогональное преобразование $\sigma_\ell : V \to V$, переводящее вектор n в $\sigma_n(n) = -n$ и тождественно действующее на ортогональной этому вектору прямой $\ell = n^\perp$, которая задаётся в ортонормальном базисе уравнением $(n, x) = 0$. Мы будем называть преобразование σ_n *отражением*[5] в прямой ℓ. Отражение σ_ℓ переводит каждый вектор $v \in V$ в вектор $\sigma_\ell(v)$, который имеет ту же нормальную составляющую[6] относительно n, что и v, однако противоположную по знаку ортогональную проекцию на n, см. рис. 3◇9. Тем самым,

$$\sigma_\ell(v) = v - 2\,\frac{(n,v)}{(n,n)} \cdot n\,. \tag{3-14}$$

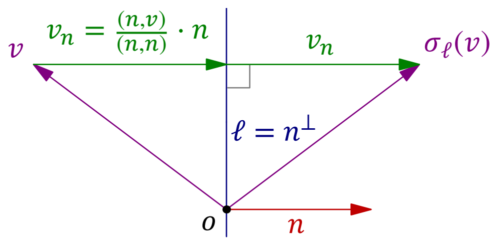

Рис. 3◇9. Отражение σ_ℓ.

[1] См. n° 3.1.1 на стр. 35.

[2] Т. е. покажите, что в каждом из этих трёх случаев единственное аффинное преобразование, переводящее вершины одного треугольника в соответствующие вершины другого, является движением.

[3] См. предл. 2.5 на стр. 29.

[4] См. формулу (3-1) на стр. 33.

[5] В школьном курсе его обычно называют *осевой симметрией*.

[6] См. опр. 3.2 на стр. 34.

Упражнение 3.14. Проверьте прямым вычислением, что преобразование (3-14) линейно и сохраняет скалярные произведения.

Предложение 3.5
Каждое несобственное ортогональное линейное преобразование плоскости является отражением.

Доказательство. Поскольку несобственное преобразование φ не тождественно, $\varphi(v) \neq v$ для некоторого ненулевого вектора $v \in V$. Так как φ сохраняет начальную точку o и середину s отрезка $[v, \varphi(v)]$, оно действует на треугольник $\triangle\, osv$ так же, как отражение в срединном перпендикуляре (os) к отрезку $[v, \varphi(v)]$. Поэтому $\varphi = \sigma_{(os)}$. □

Предложение 3.6
Каждое собственное ортогональное линейное преобразование плоскости является поворотом.

Доказательство. Если собственное ортогональное линейное преобразование $\varphi : V \to V$ переводит единичный вектор e_1 в вектор $f_1 = \varphi(e_1)$, то оно переводит вектор e_2, дополняющий e_1 до положительно ориентированного ортонормального базиса, в вектор f_2, дополняющий f_1 до положительно ориентированного базиса, как на рис. 3◇10. Тем самым, φ представляет собою поворот на ориентированный угол $\vartheta = \measuredangle(e_1, f_1)$. □

Упражнение 3.15. Убедитесь, что матрица[1] поворота против часовой стрелки на угол ϑ имеет в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе вид $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$.

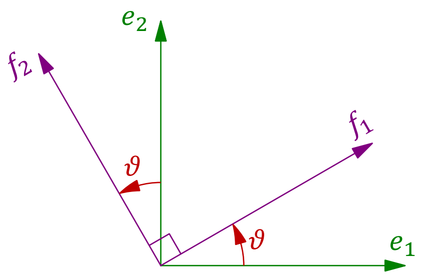

Рис. 3◇10. Поворот.

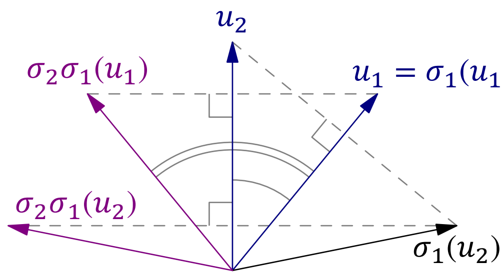

Рис. 3◇11. Композиция отражений.

Упражнение 3.16. Покажите, что композиция $\sigma_2 \circ \sigma_1$ отражений в прямых с векторами скоростей u_1 и u_2 является поворотом на угол $2\measuredangle(u_1, u_2)$ в направлении от u_1 к u_2, см. рис. 3◇11.

3.4.2. Описание изометрий аффинной евклидовой плоскости. Из предыдущего вытекает, что любое несобственное движение евклидовой аффинной плоскости является композицией $\tau_w \circ \sigma_\ell$ отражения и сдвига, а любое собственное — композицией $\tau_u \circ \varrho_{o,\vartheta}$ сдвига с поворотом $\varrho_{o,\vartheta}$ вокруг некоторой точки o на какой-то угол ϑ.

Собственное движение $\varphi = \tau_u \circ \varrho_{o,\vartheta}$ с ненулевым углом ϑ имеет неподвижную точку — конец вектора $\overrightarrow{pq} = u$, который является диагональю ромба с вершиной o и ориентированным

[1] См. n° 2.3 на стр. 26.

углом $\measuredangle(\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq}) = -\vartheta$, см. рис. 3◇12 на стр. 42. По предл. 3.5 преобразование φ является поворотом вокруг точки q. Так как поворот вокруг q на угол ϑ переводит o в $\varphi(o)$, мы заключаем, что $\varphi = \varrho_{q,\vartheta}$.

Упражнение 3.17. Найдите координаты точки q относительно положительно ориентированного ортонормального репера $(o;\ u_1, u_2)$, вектор u_1 которого сонаправлен с u.

Несобственное движение $\varphi = \tau_w \circ \sigma_\ell$ является композицией $\varphi = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ отражения относительно сдвинутой на половину вектора w прямой $\tau_{w/2}(\ell)$ и параллельного этой прямой сдвига на вектор w_ℓ — ортогональную проекцию вектора w на прямую ℓ, см. рис. 3◇13. Действительно, композиции $\tau_w \circ \sigma_\ell$ и $\tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ одинаково действуют на аффинный репер $(o;\ v, n)$ с началом в произвольной точке $o \in \ell$ и ортонормальными базисными векторами v, n, направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно прямой ℓ, как на рис. 3◇13.

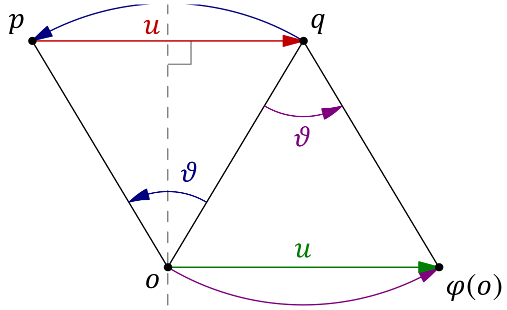

Рис. 3◇12. $\tau_u \circ \varrho_{o,\vartheta} = \varrho_{p,\vartheta}$.

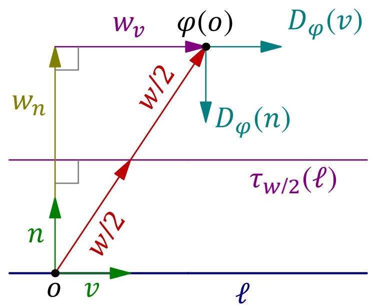

Рис. 3◇13. $\tau_w \circ \sigma_\ell = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$.

Композиция отражения со сдвигом вдоль оси этого отражения называется *скользящей симметрией*. Представление несобственного движения φ в виде скользящей симметрии

$$\lambda_{v,\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_v \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \tau_v\,, \quad \text{где} \quad v || \ell\,,$$

замечательно тем, что отражение и сдвиг в нём коммутируют друг с другом, а само это представление единственно: прямая ℓ однозначно определяется преобразованием φ как геометрическое место середин отрезков $[p, \varphi(p)]$, после чего сдвиг $\tau_v = \varphi \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \varphi$ тоже однозначно восстанавливается по φ и ℓ. Суммируя сказанное, мы получаем следующее классическое описание движений плоскости.

Теорема 3.1 (теорема Шаля[1])
Всякое собственное движение плоскости является сдвигом или поворотом, а всякое несобственное — скользящей симметрией. □

Упражнение 3.18. Покажите, что композиция отражения относительно прямой ℓ_1 с последующим отражением относительно параллельной ей прямой ℓ_2 является сдвигом на удвоенное расстояние между ℓ_1 и ℓ_2 в направлении от ℓ_1 к ℓ_2 вдоль их общей нормали.

Следствие 3.3
Любое собственное движение может быть (многими способами) разложено в композицию двух отражений, а несобственное — в композицию трёх. □

[1] *Michel Floréal Chasles* (15.XI.1793 – 18.XII.1880) — выдающийся французский геометр.

3.5. Комплексные числа. Обозначим через $\mathbb{C}$ двумерное евклидово пространство с фиксированным ортонормальным базисом, векторы которого будем обозначать 1 и i. В разложении произвольного вектора $z \in \mathbb{C}$ по этому базису вектор 1 обычно опускают и пишут $z = x + iy$, имея в виду вектор с координатами (x, y) в базисе 1, i. Такой вектор имеет длину $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вещественные числа x, y и $|z|$ называются, соответственно, *действительной частью*, *мнимой частью* и *модулем комплексного числа* $z \in \mathbb{C}$. Ориентированный угол $\measuredangle(1, z)$ между базисным вектором 1 и вектором z называется *аргументом* числа z и часто обозначается через[1]

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid z = |z| \cos\alpha + i\,|z| \sin\alpha\}\,.$$

Векторы $z \in \mathbb{C}$ называют *комплексными числами*, поскольку их можно не только складывать, но и умножать. Произведение $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ определяется как вектор, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &\overset{\text{def}}{=} |z_1| \cdot |z_2| \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) &\overset{\text{def}}{=} \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) = \{\vartheta_1 + \vartheta_2 \mid \vartheta_1 \in \operatorname{Arg}(z_1)\,,\ \vartheta_2 \in \operatorname{Arg}(z_2)\} \end{aligned} \tag{3-15}$$

Базисный вектор 1 является нейтральным элементом относительно умножения, что оправдывает его опускание в формулах вроде $z = x + yi = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$. Обратите внимание, что оба равенства суть верные равенства в $\mathbb{C}$, если понимать в них сложение и умножение как сложение и умножение комплексных чисел и считать поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ вложенным в плоскость $\mathbb{C}$ в виде координатной прямой[2] $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}$.

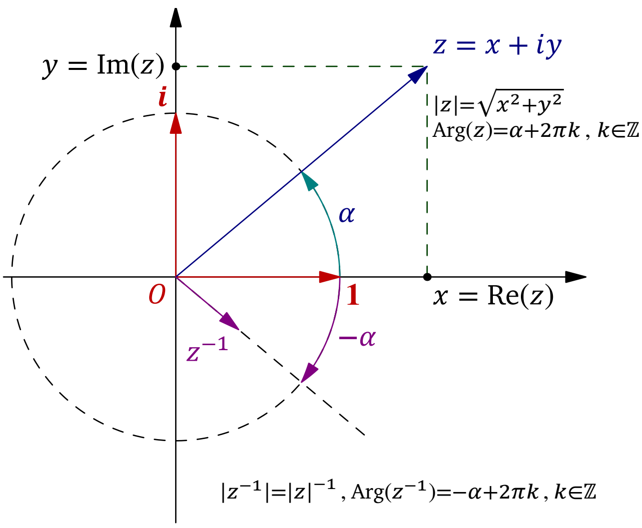

Рис. 3⋄14. Числа $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ и $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos\alpha - i \sin\alpha)$.

Обратным по умножению к ненулевому вектору $z \in \mathbb{C}$ является вектор z^{-1} с противоположным аргументом $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg}(z)$ и обратным модулем $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, см. рис. 3⋄14.

[1] Напомню, что ориентированный угол — это множество всех вещественных чисел, имеющих заданные синус и косинус, как в форм. (3-9) на стр. 38. Любые два числа из этого множества различаются на целое число оборотов по единичной окружности.

[2] Обратите внимание, что правило умножения отрицательных вещественных чисел («минус на минус даёт плюс») согласуется с формулами (3-15).

Предложение 3.7
Комплексные числа образуют поле.

Доказательство. Из всех свойств поля[1] нам остаётся проверить только распределительный закон $a(b+c)=ab+ac$. На геометрическом языке это равенство означает, что задаваемое умножением на фиксированный вектор $a\in\mathbb{C}$ отображение $\mu_a:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto az$, аддитивно, т. е. $\mu_a(b+c)=\mu_a(b)+\mu_a(c)$. Отображение μ_a представляет собою *поворотную гомотетию* — композицию поворота на угол $\mathrm{Arg}(a)$ вокруг нуля и гомотетии с коэффициентом $|a|$ и центром в нуле. Так как и поворот, и гомотетия линейны, линейно и μ_a. □

3.5.1. Алгебраическая запись комплексных чисел. Поскольку базисный вектор i удовлетворяет соотношению $i^2=-1$ и умножение дистрибутивно по отношению к сложению, в поле $\mathbb{C}$ выполняется равенство

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\,. \tag{3-16}$$

Обратное к числу $z=x+iy$ число z^{-1} равно

$$z^{-1}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{|z|^2}-i\,\frac{y}{|z|^2}\,. \tag{3-17}$$

Число $\overline{z}\overset{\text{def}}{=}x-iy$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z=x+iy$. В терминах комплексного сопряжения

$$z^{-1}=\overline{z}/|z|^2\,.$$

Геометрически, комплексное сопряжение $z\mapsto\overline{z}$ представляет собою отражение комплексной плоскости относительно вещественной оси $\mathbb{R}\cdot 1$. С алгебраической точки зрения сопряжение является *инволютивным автоморфизмом* поля $\mathbb{C}$, т. е. для всех $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$

$$\overline{\overline{z}}=z\,,\quad \overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2\,,\quad \overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2\,.$$

Упражнение 3.19. Покажите, что следующие свойства автоморфизма[2] φ поля $\mathbb{C}$ эквивалентны: а) $\varphi(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ б) φ является линейным преобразованием двумерного векторного пространства $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$ в) либо $\varphi(z)=z$ для всех $z\in\mathbb{C}$, либо $\varphi(z)=\overline{z}$ для всех $z\in\mathbb{C}$.

3.6. Преобразования подобия. Отображение $\varphi:\mathbb{A}^2(\mathbb{R})\to\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ евклидовой аффинной плоскости $\mathbb{A}^2=\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$ в себя называется *преобразованием подобия* или просто *подобием*, если оно изменяет все расстояния между точками в одно и тоже число раз, т. е. когда существует такая положительная вещественная константа $\gamma=\gamma(\varphi)$, зависящая только от φ и называемая *коэффициентом подобия*, что $|\varphi(p)-\varphi(q)|=\gamma|p-q|$ для всех точек $p,q\in\mathbb{A}^2$. Например, каждое движение является подобием с коэффициентом 1. Подобия образуют группу преобразований, которая называется *группой подобий*. Тот же аргумент, что и для движений[3], показывает, что подобия переводят прямые в прямые и, стало быть, являются аффинными преобразованиями.

Упражнение 3.20. Убедитесь в этом и в том, что подобия переводят окружности в окружности.

Подобия, сохраняющие ориентацию, называются *собственными*, а оборачивающие ориентацию — *несобственными*.

[1] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf.
[2] См. n° 2.1.2 на стр. 23.
[3] См. n° 3.4 на стр. 40.

Лемма 3.1
Собственные подобия сохраняют ориентированные углы, а несобственные изменяют знак ориентированных углов.

Доказательство. Беря композицию подобия φ с параллельным переносом, мы можем и будем считать, что оно сохраняет начало координат, т. е. является линейным преобразованием подлежащего векторного пространства $V \simeq \mathbb{R}^2$. Тогда для любых двух векторов $u, w \in V$ имеем[1]

$$\begin{aligned}\big(\varphi(u), \varphi(w)\big) &= \left|\varphi(u) + \varphi(w)\right|^2 - \left|\varphi(u)\right|^2 - \left|\varphi(w)\right|^2 = \\ &= \left|\varphi(u+w)\right|^2 - \left|\varphi(u)\right|^2 - \left|\varphi(w)\right|^2 = \gamma^2\big(|u+w|^2 - |u|^2 - |w|^2\big) = \gamma^2(u, w)\,,\end{aligned}$$

откуда

$$\cos\measuredangle\big(\varphi(u), \varphi(w)\big) = \frac{(\varphi(u), \varphi(w))}{|\varphi(u)|\cdot|\varphi(w)|} = \frac{(u, w)}{|u|\cdot|w|} = \cos\measuredangle(u, w)\,,$$

т. е. $\measuredangle\big(\varphi(u), \varphi(w)\big) = \pm\measuredangle(u, w)$. □

3.6.1. Подобия как аффинные преобразования комплексной прямой. Фиксируем в двумерном евклидовом пространстве V любой ортонормальный базис, векторы которого обозначим через 1 и i, и отождествим это пространство с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, как в n° 3.5 выше. Это позволяет рассматривать вещественную аффинную плоскость $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{A}(V)$ как комплексную аффинную прямую $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$. Мы собираемся показать, что группа собственных подобий вещественной плоскости $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ совпадает с аффинной группой комплексной прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.

Предложение 3.8
Каждое собственное подобие $\varphi : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ является комплексным аффинным преобразованием вида $z \mapsto az + b$, а каждое несобственное — полуаффинным преобразованием вида $z \mapsto a\overline{z} + b$, где числа $a, b \in \mathbb{C}$ однозначно определяются подобием φ. Наоборот, для любых $a, b \in \mathbb{C}$ преобразования вида $z \mapsto az + b$ и $z \mapsto a\overline{z} + b$ являются, соответственно, собственным и несобственным подобиями.

Доказательство. Беря композицию собственного подобия φ со сдвигом, мы можем и будем считать, что φ оставляет на месте нуль $0 \in \mathbb{C}$. Так как φ сохраняет ориентированные углы и умножает длины векторов на фиксированное положительное число $\gamma \in \mathbb{R}$, преобразование φ является поворотной гомотетией, т. е. умножением на комплексное число $a = \varphi(1)$, что доказывает первое утверждение. Для несобственного подобия φ преобразование $z \mapsto \varphi(\overline{z})$, являющееся композицией φ с отражением в действительной оси, является собственным подобием и по уже доказанному имеет вид $z \mapsto az + b$. Поэтому $\varphi(z) = a\overline{z} + b$. □

Упражнение 3.21. Убедитесь в справедливости последнего утверждения из предл. 3.8.

Следствие 3.4
Для любых двух пар различных точек $a \neq b$ и $c \neq d$ имеется единственное собственное подобие переводящее a в c и b в d.

[1] Ср. с аналогичной выкладкой из n° 3.4.1 на стр. 40.

Доказательство. Неизвестные коэффициенты $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ искомого аффинного преобразования $z \mapsto x_1 z + x_2$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 a + x_2 = c \\ x_1 b + x_2 = d\,, \end{cases}$$

имеющей в поле $\mathbb{C}$ единственное решение[1] $x_1 = (c-d)/(a-b)$, $x_2 = (ad-bc)/(a-b)$. □

Следствие 3.5
Всякое собственное подобие является либо сдвигом, либо поворотной гомотетией.

Доказательство. Аффинное преобразование $z \mapsto az + b$ с нетождественным дифференциалом $a \neq 1$ имеет неподвижную точку $c = b/(1-a)$ и, стало быть, является поворотной гомотетией относительно этой точки. □

[1] См. лем. 1.2 на стр. 11.

Упр. 3.2. $\frac{(\lambda a,b)}{(\lambda a,\lambda a)}\cdot\lambda a=\frac{(a,b)}{(a,a)}\cdot a$.

Упр. 3.5. Если $p\notin\ell$, утверждение вытекает из предл. 3.2. Если $p\in\ell$, выберите p за начало отсчёта, обозначьте через e_1 вектор скорости прямой ℓ, возьмите любой вектор b, не пропорциональный ℓ и положите $e_2=b_{e_1^\perp}$. Тогда $e_2\neq 0$ и перпендикулярен e_1. Поэтому прямая $p+te_2$ перпендикулярна ℓ. Произвольный вектор $w=xe_1+ye_2$ перпендикулярен e_1 если и только если $x=0$. Поэтому такая прямая единственна.

Упр. 3.6. Рассмотрим любой ортонормальный базис $e,e^\perp$. Если $f=xe+ye^\perp$ образует вместе с e ортонормальный базис, то $(e,f)=0$ влечёт $x=0$, после чего $(f,f)=1$ влечёт $y^2=1$, т. е. $f=\pm e^\perp$.

Упр. 3.7. Воспользуйтесь тем, что объединение биссектрис это ГМТ, равноудалённых от двух данных прямых.

Упр. 3.8. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца равносильно неравенству

$$(u,v)^2-(u,u)\cdot(u,v)\geqslant 0\,,$$

в левой части которого стоит определитель Грама, по предл. 3.4 равный квадрату отношения площадей $s(u,w)/s(e_1,e_2)$, положительному, когда u и w не пропорциональны, и нулевому — когда пропорциональны.

Упр. 3.9. $\det^2(a,b)=\det^2(a,b_a+b_{a^\perp})=\det^2(a,b_{a^\perp})=(a,a)\cdot(b_{a^\perp},b_{a^\perp})$.

Упр. 3.10. Вычислите $\det(f,f^\perp)$ $(f^\perp,f^\perp)$ и $s(f,f^\perp)$.

Упр. 3.12. Так как $(v,v)=(u,u)$, имеем равенство углов $\measuredangle(v,u+v)=\measuredangle(u+v,u)$. Тем самым, оба этих угла составляют половину от $\measuredangle(v,u)$, см. рис. 3◇8 на стр. 39. Аналогично, $2\measuredangle(v,w+v)=\measuredangle(v,w)$, откуда $2\measuredangle(u+v,w+v)=\measuredangle(v,w)$.

Упр. 3.16. Оба линейных преобразования — композиция отражений и поворот — одинаково действуют на базис u_1,u_2.

Упр. 3.17. Ответ: $\frac{|u|}{2}\cdot\big(1,\operatorname{ctg}(\vartheta/2)\big)$.

Упр. 3.18. Выясните, куда переходит аффинный репер $(o;\,v,n)$ с началом в произвольной точке $o\in\ell$ и ортонормальными базисными векторами v,n, направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно прямым ℓ_i.

Упр. 3.19. Импликации (в) ⇒ (б) ⇒ (а) очевидны. В n° 2.1.2 на стр. 23 мы видели, что если отображение $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ перестановочно со сложением и умножением, то оно тождественно. Поэтому (а) $\iff$ (б). Так как соотношение $\varphi(i)^2=\varphi(i^2)=\varphi(-1)=-1$ влечёт $\varphi(i)=\pm i$, из линейности φ над $\mathbb{R}$ вытекает, что $\varphi(x+yi)=x\varphi(1)+y\varphi(i)=x\pm iy$, т. е. (б) ⇒ (в).