

## §1. Аффинная плоскость

**1.1. Векторные пространства.** Фиксируем произвольное поле<sup>1</sup>  $\mathbb{K}$ , элементы которого будем называть *числами* или *скалярами*. Множество  $V$ , элементы которого мы будем называть *векторами*<sup>2</sup>, является *векторным пространством* над полем  $\mathbb{K}$ , если на  $V$  определены операция сложения векторов, сопоставляющая каждой паре векторов  $v_1, v_2 \in V$  их сумму  $v_1 + v_2 \in V$ , и операция умножения векторов на числа, сопоставляющая каждому вектору  $v \in V$  и скаляру  $\lambda \in \mathbb{K}$  вектор  $\lambda \cdot v = v \cdot \lambda \in V$  так, что выполняются следующие аксиомы.

1. Свойства сложения векторов:

(1а)  $a + b = b + a$  для всех  $a, b \in V$  (см. рис. 1♦1)

(1б)  $a + (b + c) = (a + b) + c$  для всех  $a, b, c \in V$  (см. рис. 1♦2)

(1в) имеется такой нулевой вектор  $0 \in V$ , что  $a + 0 = a$  для всех  $a \in V$

(1г) для каждого вектора  $a \in V$  имеется противоположный вектор  $-a \in V$ , такой что  $a + (-a) = 0$ .

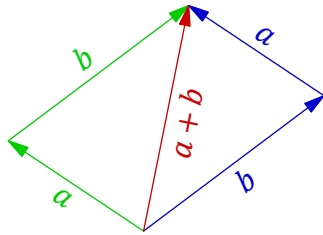


Рис. 1♦1. Правило параллелограмма.

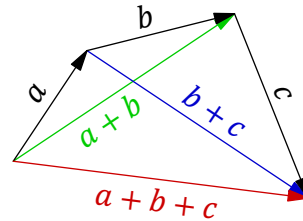


Рис. 1♦2. Правило четырёхугольника.

2. Свойства умножения векторов на числа:

(2а)  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$  для всех  $a \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(2б)  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$  для всех  $a \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(2в)  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$  для всех  $a, b \in V$  и  $\lambda \in \mathbb{K}$

(2г)  $1 \cdot a = a$  для всех  $a \in V$ .

Подмножество  $U$  векторного пространства  $V$  называется *векторным подпространством*, если для любых двух векторов  $u, w \in U$  все их линейные комбинации  $\lambda u + \mu w$  с произвольными  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  тоже лежат в  $U$ . Из написанных аксиом формально вытекает ещё несколько интуитивно ожидаемых свойств операций над векторами.

<sup>1</sup>Точное определение поля будет дано в курсе алгебры (см., например, лекцию <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf>).

<sup>2</sup>Векторы продуктивно представлять себе как направленные отрезки, рассматриваемые с точностью до параллельного переноса.

## ЛЕММА 1.1

В каждом векторном пространстве  $V$  нулевой вектор  $0 \in V$  единствен. Для любого  $a \in V$  противоположный к  $a$  вектор  $-a$  однозначно определяется по  $a$ . Кроме того,  $0 \cdot a = 0$  и  $(-1) \cdot a = -a$ , где  $0$  и  $-1$  в левых частях равенств суть числа из поля  $\mathbb{k}$ , а  $0$  и  $-a$  в правых — векторы из пространства  $V$ . Аналогично,  $\lambda \cdot 0 = 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{k}$ , где  $0 \in V$  — нулевой вектор.

Доказательство. Для любых двух нулевых векторов  $0_1, 0_2 \in V$  по аксиоме (1в) выполняется равенство  $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$ . Если векторы  $b$  и  $c$  оба противоположны к  $a$ , то  $b = b + 0 = = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$ . Если к левой и правой частям равенства

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

прибавить противоположный к  $a$  вектор  $-a$ , мы получим  $0 \cdot a = 0$ . Аналогично, прибавляя к обеим частям равенства  $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$  вектор, противоположный вектору  $\lambda \cdot 0$ , получаем  $0 = \lambda \cdot 0$ . Вектор  $(-1) \cdot a$  противоположен к  $a$ , поскольку  $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$ .  $\square$

## ПРИМЕР 1.1

Простейшие примеры векторных пространств суть *нулевое* или *тривиальное пространство*  $0$ , состоящее из одного лишь нулевого вектора  $0$ , такого что  $0 + 0 = 0 = -0$  и  $\lambda \cdot 0 = 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{k}$ , а также само поле  $\mathbb{k}$ , где сложение векторов и их умножение на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле  $\mathbb{k}$ .

ПРИМЕР 1.2 ( $n$ -МЕРНОЕ КООРДИНАТНОЕ ПРОСТРАНСТВО  $\mathbb{k}^n$ )

По определению, векторами пространства  $\mathbb{k}^n$  являются упорядоченные наборы из  $n$  чисел<sup>1</sup>

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{k}.$$

Сложение векторов и их умножение на числа задаются правилами

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

## ПРИМЕР 1.3 (ПРОСТРАНСТВО МНОГОЧЛЕНОВ)

Многочлены с коэффициентами в поле  $\mathbb{k}$  образуют векторное пространство над  $\mathbb{k}$  относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Это пространство обозначается  $\mathbb{k}[x]$ . Многочлены степени не выше  $n$  образуют в  $\mathbb{k}[x]$  векторное подпространство, которое мы будем обозначать  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ .

**1.1.1. Линейные отображения.** Отображение  $F : U \rightarrow W$  из векторного пространства  $U$  в векторное пространство  $W$  называется *линейным*, если оно перестановочно со сложением векторов и их умножением на числа в том смысле, что  $F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b)$  для всех  $a, b \in U$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ . Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само это отображение называется *изоморфизмом* векторных пространств. Изоморфизмы  $V \simeq V$  пространства с самим собою называются *автоморфизмами*. Автоморфизмы векторного пространства  $V$  образуют *группу преобразований*<sup>2</sup>. Эта группа обозначается  $GL(V)$  и называется *полной линейной группой* векторного пространства  $V$ .

<sup>1</sup>Для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но иногда бывает удобно представлять векторы пространства  $\mathbb{k}^n$  и в виде столбцов.

<sup>2</sup>См. стр. 4.

## ПРИМЕР 1.4

Пространство  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$  многочленов степени не выше  $n$  изоморфно  $(n + 1)$ -мерному координатному пространству  $\mathbb{k}^{n+1}$  посредством линейного биективного отображения, сопоставляющего многочлену  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  набор его коэффициентов  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^{n+1}$ .

**Предостережение 1.1.** Обратите внимание, что отображение  $\varphi : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ , заданное формулой  $\varphi(x) = a \cdot x + b$ , которое в школе принято называть «линейной функцией», линейно в смысле п° 1.1.1 только при  $b = 0$ . Если же  $b \neq 0$ , то  $\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x)$  и  $\varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$ , т. е.  $\varphi$  не является линейным отображением.

**Упражнение 1.1.** Докажите, что для любого линейного отображения  $F$  выполняются равенства

$$F(0) = 0 \quad \text{и} \quad F(-v) = -F(v) \quad \text{для всех } v \in V.$$

**1.1.2. Пропорциональные векторы и одномерные пространства.** Векторы  $a$  и  $b$  из векторного пространства  $V$  называются *пропорциональными*, если  $x \cdot a = y \cdot b$  для некоторых чисел  $x, y \in \mathbb{k}$ , не равных одновременно нулю. Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов  $a$  и  $b$  означает, что  $a = \lambda b$  и  $b = \lambda^{-1}a$  для некоторого ненулевого  $\lambda \in \mathbb{k}$ .

Векторное пространство  $V$  называется *одномерным*, что принято записывать равенством<sup>1</sup>  $\dim V = 1$ , если в нём есть ненулевые векторы, но все они пропорциональны друг другу. Фиксируя в одномерном пространстве  $V$  какой-нибудь ненулевой вектор  $e$ , мы можем однозначно записать любой вектор  $v \in V$  как  $v = xe$  с  $x \in \mathbb{k}$ . Такое представление единственно, поскольку из равенства  $xe = ye$  вытекает, что  $(x - y)e = 0$ , откуда  $x - y = 0$ , ибо в противном случае, умножая обе части равенства  $(x - y)e = 0$  на число  $(x - y)^{-1}$ , мы получили бы  $e = 0$ .

Число  $x$  называется *координатой* вектора  $v = xe$  относительно *базисного* вектора  $e$ . Отображение  $V \rightarrow \mathbb{k}$ , переводящее каждый вектор  $v = xe \in V$  в его координату  $x \in \mathbb{k}$  устанавливает изоморфизм между  $V$  и  $\mathbb{k}$ . При выборе другого базисного вектора  $e' = \lambda e$  координата  $x'$  каждого вектора  $v = x'e' = x'\lambda e = xe$  относительно этого нового базисного вектора связана со старой координатой  $x$  соотношением  $x' = \lambda^{-1}x$ .

Каждое линейное отображение  $F : V \rightarrow V$  одномерного пространства  $V$  в себя однозначно задаётся тем, куда оно переводит какой-нибудь базисный вектор  $e$  пространства  $V$ . Если  $F(e) = \lambda e$ , то для произвольного вектора  $v = xe$  получим  $F(xe) = xF(e) = \lambda xe$ . В частности, отображение  $F$  либо переводит все векторы в нуль, либо является *гомотетией*<sup>2</sup> с ненулевым коэффициентом  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Таким образом, полная линейная группа  $\text{GL}(V)$  одномерного пространства  $V$  состоит из гомотетий с ненулевыми коэффициентами и изоморфна мультипликативной группе  $\mathbb{k}^*$  ненулевых элементов поля  $\mathbb{k}$ .

**1.2. Двумерное векторное пространство.** Векторное пространство  $V$  называется *двумерным*, что принято записывать равенством  $\dim V = 2$ , если в нём есть пара непропорциональных векторов  $e_1, e_2$ , и каждый вектор  $v \in V$  выражается через них в виде  $v = x_1e_1 + x_2e_2$ , где  $x_1, x_2 \in \mathbb{k}$ . Любая пара векторов  $e_1, e_2$ , обладающая этими двумя свойствами, называется *базисом* пространства  $V$ . Коэффициенты  $x_1, x_2$  разложения вектора  $v$  по базису *однозначно* определяются

<sup>1</sup>Обозначение  $\dim$  является сокращением от *dimension* (размерность). В полной общности мы обсудим это понятие в п° 4.1 на стр. 46 ниже.

<sup>2</sup>Или *растяжением* в  $\lambda$  раз, т. е. действует на любой вектор  $v \in V$  по правилу  $v \mapsto \lambda v$ .

вектором  $v$  и базисом, поскольку из равенства  $x_1 e_1 + x_2 e_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2$  вытекает равенство  $(x_1 - y_1) e_1 = (x_2 - y_2) e_2$ , возможное только при  $(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = 0$  в силу того, что векторы  $e_1$  и  $e_2$  не пропорциональны. Числа  $x_1, x_2 \in \mathbb{k}$  из разложения  $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$  называются *координатами* вектора  $v$  в базисе  $e = (e_1, e_2)$ . Сопоставляя каждому вектору столбец его координат в базисе  $e$ , мы получаем биективное отображение

$$c_e : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{k}^2, \quad v = x_1 e_1 + x_2 e_2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^2.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 1.2.** Проверьте, что это отображение линейно, т. е. при сложении векторов столбцы их координат складываются, а при умножении на число — умножаются на число по правилам координатного пространства  $\mathbb{k}^2$ .

Таким образом, всякое двумерное векторное пространство  $V$  изоморфно координатному пространству  $\mathbb{k}^2$ .

**1.2.1. Определитель  $2 \times 2$ .** Пропорциональность векторов  $a = (a_1, a_2)$  и  $b = (b_1, b_2)$  в  $\mathbb{k}^2$  равносильна равенству перекрёстных произведений  $a_1 b_2 = a_2 b_1$ . Число

$$\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{1-1}$$

называется *определителем* векторов  $a, b \in \mathbb{k}^2$  или  $2 \times 2$ -матрицы, составленной из координат этих векторов. В последнем случае определитель записывают как

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что неважно, каким образом записаны координаты векторов — по строкам или по столбцам матрицы, поскольку величина (1-1) не меняется при отражении матрицы относительно диагонали, ведущей из левого верхнего угла в правый нижний<sup>1</sup>. Очевидно, что для всех векторов  $a, b, c \in \mathbb{k}^2$  и чисел  $\lambda \in \mathbb{k}$  выполняются равенства

$$\det(a, b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \tag{1-2}$$

$$\det(a, b) = -\det(b, a) \tag{1-3}$$

$$\det(\lambda a, b) = \lambda \det(a, b) = \det(a, \lambda b) \tag{1-4}$$

$$\det(a + b, c) = \det(a, c) + \det(b, c) \tag{1-5}$$

$$\det(a, b + c) = \det(a, b) + \det(a, c)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 1.3.** Убедитесь в этом!

Свойство (1-3) называется *знакопеременностью*, (1-4) — *однородностью*, (1-5) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов, т. е. *билинеен*. Из билинейности вытекает, что для любых векторов  $a, b, c, d \in \mathbb{k}^2$  и констант  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$  выполняется то же самое правило раскрытия скобок<sup>2</sup>, что и для произведения чисел:

$$\det(\alpha a + \beta b, \gamma c + \delta d) = \alpha \gamma \det(a, c) + \alpha \delta \det(a, d) + \beta \gamma \det(b, c) + \beta \delta \det(b, d).$$

<sup>1</sup>Эта диагональ называется *главной*, а отражение матрицы относительно главной диагонали называется *транспонированием*.

<sup>2</sup>Это правило называют *дистрибутивностью* или *распределительным законом*.

## ЛЕММА 1.2

Каждая пара непропорциональных векторов  $a, b \in \mathbb{k}^2$  является базисом. Коэффициенты разложения произвольного вектора  $v \in \mathbb{k}^2$  по этому базису вычисляются по правилу Крамера:

$$\begin{aligned} v = x \cdot a + y \cdot b &\iff \begin{cases} x = \det(v, b) / \det(a, b) \\ y = \det(a, v) / \det(a, b). \end{cases} \end{aligned} \quad (1-6)$$

Доказательство. Если имеется разложение  $v = x \cdot a + y \cdot b$ , то из билинейности и косимметричности определителя вытекают равенства

$$\begin{aligned} \det(a, v) &= \det(a, x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot \det(a, a) + y \cdot \det(a, b) = y \cdot \det(a, b) \\ \det(v, b) &= \det(x \cdot a + y \cdot b, b) = x \cdot \det(a, b) + y \cdot \det(b, b) = x \cdot \det(a, b), \end{aligned}$$

из которых  $x$  и  $y$  однозначно выражаются в виде (1-6). Для доказательства существования разложения  $v = x \cdot a + y \cdot b$  заметим, что разность  $v - a \cdot \det(v, b) / \det(a, b)$  пропорциональна вектору  $b$ , т. к.  $\det(v - a \cdot \det(v, b) / \det(a, b), b) = \det(v, b) - \det(a, b) \cdot \det(v, b) / \det(a, b) = 0$ . Поэтому  $v = a \cdot \det(v, b) / \det(a, b) + b \cdot y$  для некоторого  $y \in \mathbb{k}$ .  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 1.1

В любом двумерном векторном пространстве любые два непропорциональных вектора образуют его базис.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Пусть вектор  $v$  имеет в базисе  $(u_1, u_2)$  координаты  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , а векторы  $u_1$  и  $u_2$ , в свою очередь, имеют в некотором другом базисе  $(w_1, w_2)$  координаты  $u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$  и  $u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ . Найдите координаты вектора  $v$  в базисе  $(w_1, w_2)$ .

**1.3. Площадь ориентированного параллелограмма.** Функция  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ , сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов  $a, b$  двумерного векторного пространства  $V$  число  $s(a, b) \in \mathbb{k}$ , называется *площадью ориентированного параллелограмма*, если для любых векторов  $a, b \in V$  и чисел  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  выполняются равенства

$$s(a, b + \lambda a) = s(a, b) = s(a + \mu b, b) \quad (1-7)$$

$$s(\lambda a, b) = \lambda s(a, b) = s(a, \lambda b). \quad (1-8)$$

Первое из них означает, что площадь параллелограмма не меняется при параллельном переносе одной из его сторон вдоль самой себя: треугольник, который при этом отрезается, параллельно сдвигается и приклеивается с другой стороны, как на рис. 1◊3.

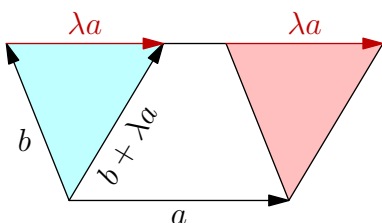


Рис. 1◊3. Площадь не меняется.

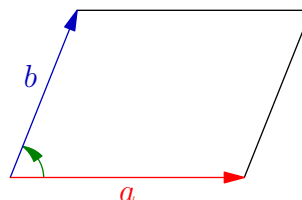


Рис. 1◊4. Ориентированный параллелограмм.

Второе свойство (1-8) утверждает, что при изменении одной из сторон параллелограмма в  $\lambda$  раз площадь также изменяется в  $\lambda$  раз. В частности,  $s(-a, b) = -s(a, b) = s(a, -b)$ , т. е. площадь *меняет знак* при смене знака одного из векторов. В школьном курсе геометрии над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  принято считать, что площадь положительна и  $s(\lambda a, b) = s(a, \lambda b) = |\lambda| \cdot s(a, b)$ . Отказываясь от положительности, мы не просто упраздняем модуль<sup>1</sup>, но помимо абсолютной величины площади учитываем также и *ориентацию* параллелограмма. На вещественной координатной плоскости  $\mathbb{R}^2$  упорядоченные пары векторов  $(a, b)$  геометрически отличаются друг от друга тем, в какую сторону происходит кратчайший поворот, совмещающий направление первого вектора с направлением второго. Те пары векторов, для которых такой поворот происходит против часовой стрелки, называются *положительно* ориентированными, а те, для которых по часовой стрелке — *отрицательно* ориентированными. Равенство  $s(-a, b) = -s(a, b)$  означает, что площадь меняет знак при смене ориентации параллелограмма на противоположную, как на рис. 1◊5.

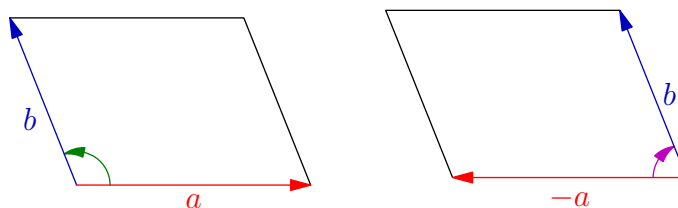


Рис. 1◊5. Смена ориентации при смене знака.

#### ЛЕММА 1.3

Каждая функция площади  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  обращается в нуль на парах пропорциональных векторов<sup>2</sup>, знакопеременна:  $s(a, b) = -s(b, a)$  и аддитивна:

$$s(a, b + c) = s(a, b) + s(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k}^2. \quad (1-9)$$

Доказательство. Первые два свойства вытекают прямо из (1-7) и (1-8):

$$\begin{aligned} s(\lambda v, v) &= s(0 + \lambda v, v) = s(0, v) = s(0 \cdot 0, v) = 0 \cdot s(0, v) = 0, \\ s(a, b) &= s(a, a + b) = s(a - (a + b), a + b) = s(-b, a + b) = -s(b, a + b) = -s(b, a). \end{aligned}$$

Докажем аддитивность. Если вектор  $a$  пропорционален и вектору  $b$ , и вектору  $c$ , то он пропорционален и их сумме  $b + c$ . В этом случае все три площади в (1-9) зануляются. Если вектор  $a$  не пропорционален, скажем, вектору  $b$ , то  $a$  и  $b$  составляют базис, и  $c = \alpha a + \beta b$  для некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ . В этом случае левая и правая части (1-9) тоже равны друг другу:

$$\begin{aligned} s(a, b + c) &= s(a, b + \alpha a + \beta b) = s(a, (1 + \beta)b) = (1 + \beta)s(a, b), \\ s(a, b) + s(a, c) &= s(a, b) + s(a, \alpha a + \beta b) = s(a, b) + s(a, \beta b) = \\ &= s(a, b) + \beta s(a, b) = (1 + \beta)s(a, b). \end{aligned}$$

□

<sup>1</sup>Что значительно упрощает вычисления и делает их осмысленными над любым полем  $\mathbb{k}$ .

<sup>2</sup>В частности, когда один из векторов нулевой или когда два вектора совпадают друг с другом. Свойство  $s(a, a) = 0$  называют *кососимметричностью*, см. упр. 1.5 ниже.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5 (кососимметричность и знакопеременность). Функция от двух аргументов  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  называется *кососимметричной*, если  $f(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$ . Убедитесь, что всякая билинейная кососимметричная функция знакопеременна, а если в поле  $\mathbb{k}$  выполнено неравенство  $1 \neq -1$ , то и наоборот, все знакопеременные функции кососимметричны.

#### ТЕОРЕМА 1.1

На координатном векторном пространстве  $\mathbb{k}^2$  имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Она имеет вид  $s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$ , где константа  $c = s(e_1, e_2)$  равна площади стандартного базисного параллелограмма на векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу аддитивности, однородности и знакопеременности функции  $s(a, b)$  для любой пары векторов  $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$  и  $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$  выполняются равенства

$$s(a, b) = s(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s(e_1, e_2) = \det(a, b) \cdot s(e_1, e_2). \quad (1-10)$$

Поэтому все функции площади пропорциональны определителю. С другой стороны, из свойств определителя (1-2) – (1-5) вытекает, что при любом  $\lambda \in \mathbb{k}$  функция  $s(a, b) = \lambda \cdot \det(a, b)$  удовлетворяет соотношениям (1-7), (1-8) и при  $\lambda \neq 0$  является ненулевой.  $\square$

#### Следствие 1.2

На любом двумерном векторном пространстве  $V$  имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Если векторы  $e = (e_1, e_2)$  образуют в  $V$  базис, а векторы  $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$  и  $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$  произвольны, то<sup>1</sup>

$$s(a, b)/s(e_1, e_2) = \det_e(a, b) = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

для любой ненулевой функции площади  $s$  на пространстве  $V$ .  $\square$

#### Следствие 1.3

Координаты вектора  $v = ax + by$  в любом базисе  $(a, b)$  двумерного векторного пространства  $V$  равны отношениям площадей  $x = s(v, b)/s(a, b)$ ,  $y = s(a, v)/s(a, b)$ .  $\square$

**1.4. Аффинные<sup>2</sup> пространства.** Множество  $\mathbb{A}$  называется *аффинным пространством* над векторным пространством  $V$ , если каждой упорядоченной паре точек  $a, b \in \mathbb{A}$  сопоставлен вектор  $\overline{ab} \in V$  так, что для любой точки  $p \in \mathbb{A}$  отображение векторизации с центром в  $p$

$$v_p : \mathbb{A} \rightarrow V, \quad q \mapsto \overline{pq},$$

взаимно однозначно, и для любых трёх (не обязательно различных) точек  $a, b, c \in \mathbb{A}$  выполняется *правило треугольника*  $\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$ .

<sup>1</sup>Здесь и далее мы обозначаем через  $\det_e(a, b)$  определитель матрицы, образованной столбцами координат векторов  $a, b$  в базисе  $e$ .

<sup>2</sup>Термин *аффинный* не должен вызывать «греческих» реминисценций — это банальная калька с английского *affine* (ассоциированный).

Иначе можно сказать, что с каждым вектором  $v \in V$  связано преобразование сдвига<sup>1</sup>

$$\tau_v : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, \quad p \mapsto p + v,$$

со следующими двумя свойствами: для каждой пары точек  $p, q \in \mathbb{A}$  имеется единственный такой вектор  $v \in V$ , что  $p + v = q$ , и для любых векторов  $u, w \in V$  выполняется равенство

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}.$$

Второе описание эквивалентно первому: вектор  $v \in V$  со свойством  $p + v = q$ , о котором идёт речь во втором определении, это вектор  $\overrightarrow{pq}$  из первого определения, а правило треугольника из первого определения означает равенство  $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}$  во втором.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь в этом и выведите из определений, что: а)  $\overrightarrow{aa} = 0$  для всех точек  $a \in \mathbb{A}$  б)  $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$  для всех точек  $p, q \in \mathbb{A}$  в)  $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc} \Leftrightarrow \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ad}$  для любой четвёрки точек  $a, b, c, d \in \mathbb{A}$ .

ПРИМЕР 1.5 (Аффинная координатная плоскость  $\mathbb{A}^2$ )

Множество  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{k})$ , точками которого являются пары чисел  $p = (p_1, p_2)$  из поля  $\mathbb{k}$  и точкам  $p, q$  сопоставляется вектор  $\overrightarrow{pq} = q - p = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$  очевидно удовлетворяет предыдущим определениям. Оно называется *аффинной координатной плоскостью* над полем  $\mathbb{k}$ .

ПРИМЕР 1.6 (Приведённые квадратные трёхчлены)

Пространство  $\mathcal{P}_2$ , точками которого являются приведённые<sup>2</sup> квадратные трёхчлены

$$p(x) = x^2 + p_1x + p_2 \in \mathbb{k}[x],$$

не является векторным пространством, поскольку сумма приведённых многочленов и произведение приведённого многочлена на число не являются приведёнными многочленами. Однако разности  $q - p = (q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)$  приведённых трёхчленов  $q = x^2 + q_1x + q_2$  и  $p = x^2 + p_1x + p_2$  образуют векторное пространство  $V = \mathbb{k}[x]_{\leq 1}$  многочленов степени  $\leq 1$ , и при произвольно зафиксированном многочлене  $p$  сопоставление  $q \mapsto \overrightarrow{pq} \stackrel{\text{def}}{=} (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$  устанавливает биекцию между  $\mathcal{P}_2$  и  $V$ , удовлетворяющую предыдущим определениям. Поэтому пространство  $\mathcal{P}_2$  является аффинной плоскостью над пространством многочленов степени  $\leq 1$ .

ПРИМЕР 1.7 (Аффинизация векторного пространства)

Из каждого векторного пространства  $V$  можно изготовить аффинное пространство  $\mathbb{A}(V)$ , называемое *аффинизацией* векторного пространства  $V$ . Точками пространства  $\mathbb{A}(V)$  по определению являются векторы из  $V$ . В пространстве  $\mathbb{A}(V)$  имеется выделенная точка  $0$ , отвечающая нулевому вектору, а все остальные точки продуктивно воспринимать как «концы» всевозможных «радиус-векторов»  $v \in V$ , отложенных от нулевой точки. Сдвиг  $\tau_v : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  переводит точку  $a$ , отвечающую радиус-вектору  $a \in V$ , в точку  $a + v$ , отвечающую радиус-вектору  $a + v$ .

<sup>1</sup>Или откладывание вектора  $v$  от точек  $A \in \mathbb{A}$ .

<sup>2</sup>Т. е. со старшим коэффициентом 1.



**1.4.1. Аффинная система координат** на аффинной плоскости  $\mathbb{A}^2$  по определению состоит из произвольно взятой точки  $o \in \mathbb{A}^2$  и базиса  $e_1, e_2$  в векторном пространстве  $V$ . Тройку  $(o; e_1, e_2)$  также называют *координатным репером с началом в  $o$  и базисом  $e_1, e_2$* . Каждый координатный репер устанавливает биекцию между точками плоскости  $\mathbb{A}^2$  и парами чисел, сопоставляющую точке  $p \in \mathbb{A}^2$  координаты вектора  $\overrightarrow{op}$  в базисе  $e_1, e_2$ . Эти координаты называются *аффинными координатами точки  $p$  относительно репера  $(o; e_1, e_2)$* .

**Упражнение 1.7.** Убедитесь, что столбец координат вектора  $\overrightarrow{pq}$  в произвольном базисе  $(e_1, e_2)$  пространства  $\mathbb{k}^2$  равен разности  $q - p$  столбцов координат точек  $q, p \in \mathbb{A}(\mathbb{k}^2)$  относительно любого репера  $(o; e_1, e_2)$  на аффинной плоскости  $\mathbb{A}(\mathbb{k}^2)$  вне зависимости от выбора начальной точки  $o$  этого репера.

Так, в **прим. 1.6** коэффициенты  $(p_1, p_2)$  трёхчлена  $x^2 + p_1x + p_2 \in \mathcal{P}_2$  являются его координатами относительно репера  $(o; e_1, e_2)$  с начальной точкой  $o = x^2 \in \mathcal{P}_2$  и стандартным базисом  $e_1 = x, e_2 = 1$  в векторном пространстве  $\mathbb{k}[x]_{\leq 1}$ .

**1.4.2. Барицентры и барицентрические комбинации точек.** Для любого набора точек

$$p_1, p_2, \dots, p_m$$

в аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  и любых чисел  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{k}$  с ненулевой суммой  $\mu = \sum \mu_i \neq 0$  существует единственная точка  $c \in \mathbb{A}$ , такая что

$$\mu_1 \overrightarrow{cp_1} + \mu_2 \overrightarrow{cp_2} + \dots + \mu_m \overrightarrow{cp_m} = 0. \quad (1-11)$$

В самом деле, задавшись произвольной начальной точкой  $o \in \mathbb{A}$ , мы можем для произвольной точки  $c \in \mathbb{A}$  записать сумму из левой части (1-11), как

$$\sum \mu_i \overrightarrow{cp_i} = \sum \mu_i (\overrightarrow{op_i} - \overrightarrow{oc}) = -\mu \overrightarrow{oc} + \sum \mu_i \overrightarrow{op_i}.$$

Поэтому соотношение (1-11) выполняется для единственной точки  $c$  с радиус вектором

$$\overrightarrow{oc} = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{op_i}. \quad (1-12)$$

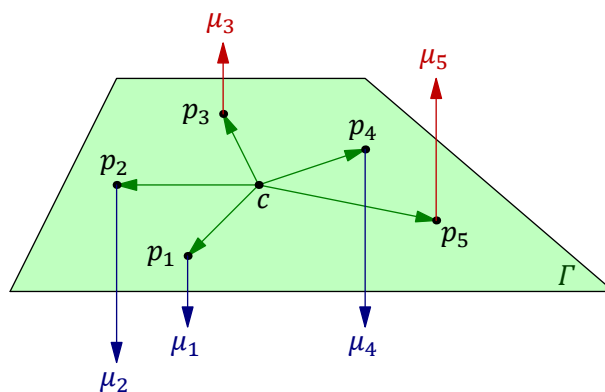


Рис. 1◊6. Моменты сил.

Эта точка называется *центром тяжести* или *барицентром* точек  $p_i$  с весами  $\mu_i$ . Термин пришёл из механики: если поместить аффинное пространство  $\mathbb{A}$  в пространство на единицу большей размерности в качестве горизонтальной гиперплоскости  $\Gamma$ , как на рис. 1◊6, и приложить к

каждой точке  $p_i$  силу  $\mu_i$ , направленную перпендикулярно вниз при  $\mu > 0$ , и вверх при  $\mu < 0$ , то равенство (1-11) будет означать равенство нулю суммы моментов всех этих сил относительно точки  $c$ . Если оно выполняется, плоскость  $\Gamma$  останется неподвижной, удерживаемая ровно за одну точку  $c$ . Так как по предыдущему точка  $c$  однозначно определяется соотношением (1-11), в котором точка  $o$  никак не участвует, точка

$$o + \overline{oc} = o + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overline{op}_i$$

не зависит от выбора точки  $o$ . Поэтому для любого набора точек  $p_1, p_2, \dots, p_m$  и любых констант  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  с суммой  $\sum \mu_i = 1$ , точка

$$\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_m p_m \stackrel{\text{def}}{=} o + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot \overline{op}_i \quad (1-13)$$

не зависит от выбора начальной точки  $o$ , что и оправдывает обозначение, использованное в левой части (1-13). Точка (1-13) называется *барицентрической комбинацией* точек  $p_1, p_2, \dots, p_m$  с весами  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.8 (группирование масс).** Пусть набор точек  $p_i$  с весами  $\mu_i$  и набор точек  $q_j$  с весами  $\nu_j$  имеют центры тяжести в точках  $p$  и  $q$ , причём обе суммы весов:  $\mu = \sum \mu_i$  и  $\nu = \sum \nu_j$ , а также их сумма  $\mu + \nu$  ненулевые. Убедитесь, что центр тяжести объединения всех точек<sup>1</sup>  $p_i$  и  $q_j$  совпадает с центром тяжести точек  $p$  и  $q$ , взятых с весами  $\mu$  и  $\nu$ . Убедитесь также, что любая барицентрическая комбинация  $\sum_i y_i p_i$  точек  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , каждая из которых в свою очередь является барицентрической комбинацией  $p_i = \sum_j x_{ij} q_{ij}$  каких-то ещё точек  $q_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq k_i$ , тоже представляется в виде барицентрической комбинации  $\sum_{ij} z_{ij} q_{ij}$  тех же точек  $q_{ij}$ , причём если все  $y_i \geq 0$  и все  $x_{ij} \geq 0$ , то и все  $z_{ij} \geq 0$ .

**1.5. Прямые.** Три точки  $a, b, p$  аффинного пространства называются *коллинеарными*, если векторы  $\overline{pa}$  и  $\overline{pb}$  пропорциональны. Например, это так, когда какие-то две из трёх точек совпадают друг с другом. Если  $a \neq b$  пропорциональность векторов  $\overline{pa}$  и  $\overline{pb}$  означает, что при некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ , не обращающихся одновременно в нуль, выполняются равносильные друг другу равенства

$$\beta \cdot \overline{pa} + \alpha \cdot \overline{pb} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot b.$$

В этом случае говорят, что точка  $p$  *делит* точки  $a$  и  $b$  в отношении  $\alpha : \beta$ . Иначе можно сказать, что точка  $p$  является барицентрической комбинацией точек  $a$  и  $b$  с весами  $\beta/(\alpha + \beta)$  и  $\alpha/(\alpha + \beta)$  соответственно. Каждая точка

$$p = o + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overline{oa} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overline{ob} = a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overline{ab} = b + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overline{ba},$$

коллинеарная паре различных точек  $a \neq b$ , однозначно определяется отношением  $\alpha : \beta$ , которое может принимать любые значения, отличные от  $-1$ , ибо  $\alpha = -\beta$  означает, что  $\overline{pa} = \overline{pb}$ , т. е.  $a = b$ . При этом значения

$$\alpha : \beta = 0 : 1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha : \beta = 1 : 0 = \infty$$

<sup>1</sup>Если какая-то из точек  $p_i$  совпадает с некоторой точкой  $q_j$ , то их «объединение» заключается в сложении весов.

допустимы и отвечают точкам  $p = a$  и  $p = b$  соответственно. Равновесный барицентр<sup>1</sup>

$$c = \frac{a + b}{2},$$

делящий  $a$  и  $b$  в отношении  $1 : 1$ , называется *серединой* или *центром* точек  $a \neq b$ .

Множество всех точек  $x$ , коллинеарных двум заданным различным точкам  $a \neq b$ , называется *прямой* и обозначается

$$(ab) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = \alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \alpha + \beta = 1\}$$

Иначе прямую  $(ab)$  в аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  над векторным пространством  $V$  можно описать как ГМТ вида  $x = a + vt$ , где  $t$  пробегает основное поле  $\mathbb{k}$ , а  $p \in \mathbb{A}$  и  $v \in V$  суть фиксированные точка и ненулевой вектор, называемые *начальной точкой* и *направляющим вектором* или *вектором скорости* прямой  $(ab)$ .

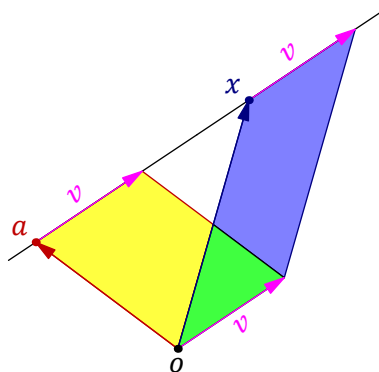


Рис. 1♦7. Уравнение прямой.

Предложение 1.1

На аффинной плоскости проходящая через точку  $a = (a_1, a_2)$  прямая с вектором скорости  $v = (v_1, v_2)$  описывается в координатах  $(x_1, x_2)$  относительно произвольного репера уравнением

$$\det(x, v) = \det(a, v) \quad \text{или} \quad v_2 x_1 - v_1 x_2 = v_2 a_1 - v_1 a_2. \quad (1-14)$$

Наоборот, множество всех решений  $x = (x_1, x_2)$  любого уравнения  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$  с не равными одновременно нулю коэффициентами  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}$  представляет собою прямую с вектором скорости, пропорциональным вектору  $v = (\alpha_2, -\alpha_1)$ .

Доказательство. Обозначим начало координат через  $o$  и рассмотрим векторы  $\overline{ox} = (x_1, x_2)$  и  $\overline{oa} = (a_1, a_2)$ . Равенство  $\det(v, x) = \det(v, a)$  равносильно равенству  $0 = \det(v, \overline{ax}) = 0$ , означающему пропорциональность векторов  $\overline{ax}$  и  $v$ .  $\square$

Замечание 1.1. На геометрическом языке уравнение (1-14) констатирует равенство площадей жёлтого и синего параллелограммов на рис. 1♦7.

Упражнение 1.9. Напишите уравнение прямой, параллельной вектору  $(5, 2)$  и проходящей через точку  $(2, -3)$ , а также прямой, проходящей через точки  $(-3, 5)$  и  $(4, -1)$ , и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями  $3x_1 + 5x_2 = -1$  и  $2x_1 - 3x_2 = 5$ .

Пример 1.8 (пересечение прямых)

Если левые части уравнений  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma$  и  $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta$  не пропорциональны, то решения  $x = (x_1, x_2)$  системы

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta, \end{cases} \quad (1-15)$$

<sup>1</sup>Обратите внимание, что он существует над любым полем  $\mathbb{k}$ , в котором  $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$ . Если основное поле  $\mathbb{k}$  имеет характеристику  $\text{char}(\mathbb{k}) = 2$ , т. е.  $1 + 1 = 0$  в  $\mathbb{k}$ , то середина не определена.

суть координаты вектора  $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$  в координатном пространстве  $\mathbb{k}^2$  относительно базиса из векторов  $e_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  и  $e_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ . По правилу Крамера<sup>1</sup> они равны

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} \gamma & \alpha_2 \\ \delta & \beta_2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma \\ \beta_1 & \delta \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (1-16)$$

Таким образом, прямые с непропорциональными скоростями пересекаются в единственной точке, координаты которой выражаются через коэффициенты задающих эти прямые уравнений (1-15) по формулам (1-16). Например, прямые  $3x_1 + 5x_2 = -1$  и  $2x_1 - 3x_2 = 5$  из упр. 1.9 пересекаются в точке с координатами  $x_1 = 22/19$ ,  $x_2 = -17/19$ .

Если же левые части уравнений (1-15) пропорциональны, скажем:  $\beta_1 = \lambda\alpha_1$  и  $\beta_2 = \lambda\alpha_2$ , то при  $\delta \neq \lambda\gamma$  задаваемые этими уравнениями прямые параллельны, а при  $\delta = \lambda\gamma$  они совпадают друг с другом.

Таким образом, на аффинной плоскости  $A^2$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  выполняются евклидовы аксиомы, описывающие взаимное расположение прямых и точек на плоскости, т. е. справедливо

**Предложение 1.2**

Через любые две различные точки аффинной плоскости проходит ровно одна прямая. Через любую точку, не лежащую на произвольно заданной прямой  $\ell$ , проходит ровно одна прямая, не пересекающая прямую  $\ell$ .  $\square$

**1.6. Треугольники.** В этом разделе мы предполагаем, что  $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$  в поле  $\mathbb{k}$ . Фигура, образованная на аффинной плоскости тремя неколлинеарными точками  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и соединяющими их прямыми  $(ab)$ ,  $(bc)$ ,  $(ca)$ , называется *треугольником*  $\Delta abc$ . Зафиксируем какую-нибудь ненулевую функцию площади  $s$  и назовём *площадью ориентированного треугольника*  $\Delta abc$  половину площади ориентированного параллелограмма, натянутого на упорядоченную пару векторов  $\overline{ab}$ ,  $\overline{ac}$ :

$$s(abc) \stackrel{\text{def}}{=} s(\overline{ab}, \overline{ac})/2. \quad (1-17)$$

**Предложение 1.3**

Для любого треугольника  $\Delta abc$  и любой точки  $p$  выполняются соотношения:

$$s(abc) = s(bca) = s(cab) = -s(bac) = -s(acb) = -s(cba) \quad (1-18)$$

$$s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca). \quad (1-19)$$

**Доказательство.** Для доказательства соотношений (1-18) достаточно проверить равенства

$$s(bca) = s(abc) \quad \text{и} \quad s(bac) = -s(abc),$$

которые вытекают из билинейности и кососимметричности площади параллелограмма:

$$\begin{aligned} 2s(bca) &= s(\overline{bc}, \overline{ba}) = s(\overline{ba} + \overline{ac}, \overline{ba}) = s(\overline{ac}, \overline{ba}) = s(\overline{ab}, \overline{ac}) = 2s(abc) \\ 2s(bac) &= s(\overline{ba}, \overline{bc}) = s(\overline{ba}, \overline{ba} + \overline{ac}) = s(\overline{ba}, \overline{ac}) = -s(\overline{ab}, \overline{ac}) = -2s(abc). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>См. лем. 1.2 на стр. 10.

Равенство (1-19) проверяется примерно так же:

$$\begin{aligned} 2s(abc) &= s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = s(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pb}, \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pc}) = s(\overrightarrow{ap}, \overrightarrow{pc}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{ap}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc}) = \\ &= s(\overrightarrow{pc}, \overrightarrow{pa}) + s(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pb}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc}) = 2(s(pab) + s(pbc) + s(pca)) \end{aligned}$$

□

Пример 1.9 (площади ориентированных многоугольников)

Над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  формула (1-18) имеет следующее наглядное описание. Будем называть *ориентацией* треугольника выбор одного из двух возможных направлений обхода его контура. Обход против часовой стрелки, при котором треугольник остаётся слева по ходу движения, считается положительным, и площади таких треугольников положительны. Площади треугольников, обходимых по часовой стрелке отрицательны. Ориентация треугольников согласована с обсуждавшейся на стр. 11 ориентацией параллелограммов: если выпустить из вершины треугольника два вектора по его сторонам, то ориентация натянутого на них параллелограмма совпадает с той ориентацией контура треугольника, что задаётся движением от конца первого вектора к концу второго по противоположному выбранной вершине основанию, см. рис. 1◊8.

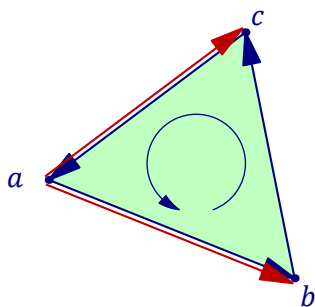


Рис. 1◊8.  $2s(abc) = \det(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ .

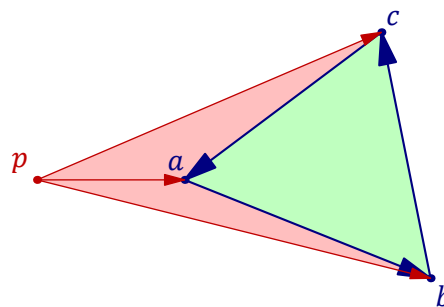


Рис. 1◊9.

$$s(abc) = S(pab) + S(pbc) + S(pca).$$

При таких договорённостях об ориентации, формула (1-19) утверждает, что площадь ориентированного треугольника  $abc$  можно вычислять обходя его контур против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на его стороны треугольников с вершиной в произвольно зафиксированной точке  $p$ , при этом исходящие из  $p$  векторы, используемые для вычисления площадей, всегда упорядочиваются по ходу движения. Так на рис. 1◊9 площадь  $\Delta pbc$  войдёт в сумму со знаком плюс, а площади  $\Delta pab$  и  $\Delta pac$  — с минусами, что и даст площадь  $\Delta abc$ .

Полученная формула очевидным образом обобщается на произвольную, возможно даже самопересекающуюся, как на рис. 1◊10, замкнутую ломаную  $q_0q_1 \dots q_m$ , у которой  $q_m = q_0$ . Обходя контур ломаной против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на её звенья треугольников с вершиной в произвольно заданной точке  $p$ , мы получим сумму

$$\sum_{i=0}^{m-1} s(pq_iq_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \det(\overrightarrow{pq_i}, \overrightarrow{pq_{i+1}})$$

равную сумме взятых с надлежащими знаками площадей многоугольников, ограничиваемых этой ломаной. А именно, многоугольники контур которых обходится против часовой стрелки<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Т. е. многоугольники, лежащие слева по ходу движения вдоль ломаной.

надлежит учитывать со знаком плюс, а многоугольники, обходимые по часовой стрелке<sup>1</sup> — со знаком минус.

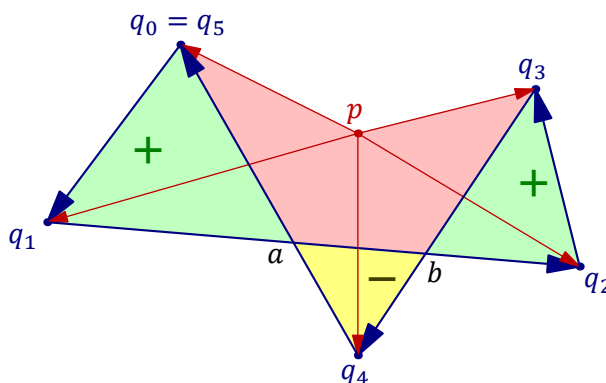


Рис. 1◊10.  $\sum_{i=0}^4 s(pq_iq_{i+1}) = s(q_0q_1a) - s(baq_4) + s(bq_2q_3)$ .

Упражнение 1.10. Покажите, ориентированные площади треугольников с общей вершиной и лежащими на одной прямой основаниями относятся как эти ориентированные основания, т. е. для любых трёх коллинеарных точек  $a, b, c$  и произвольной точки  $p$  выполняется равенство  $s(pab) : s(pbc) = \overline{ab} : \overline{bc}$ , где справа стоит такое число  $\lambda \in \mathbb{k}$ , что  $\lambda \cdot \overline{bc} = \overline{ab}$ .

**1.6.1. Бариецентрические координаты.** Зафиксируем на плоскости какой-нибудь треугольник  $\Delta abc$  и сопоставим каждой тройке чисел  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$  с суммой  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  точку

$$p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c.$$

Покажем, что это сопоставление устанавливает биекцию между такого рода тройками чисел и точками плоскости. Равенство  $p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$  означает, что  $\overline{ap} = \beta \cdot \overline{ab} + \gamma \cdot \overline{ac}$ , т. е. числа  $\beta, \gamma$  являются координатами вектора  $\overline{ap}$  в базисе  $\overline{ab}, \overline{ac}$ . Так как пары координат биективно соответствуют векторам, а векторы  $\overline{ap}$  — точкам  $p$ , мы имеем биекцию между точками  $p$  и произвольными парами чисел  $(\beta, \gamma)$ . Но такие пары биективно соответствуют тройкам  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \beta - \gamma, \beta, \gamma)$ . Числа  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$  с суммой  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  называются *бариецентрическими координатами* точки  $p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$  относительно  $\Delta abc$ . Использование тройки чисел  $\alpha, \beta, \gamma$ , связанных соотношением  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , вместо пары чисел  $\beta, \gamma$  часто оказывается более удобным, поскольку не привязано к выбору той или иной вершины в треугольнике, что позволяет видеть и использовать имеющиеся в задаче симметрии.

Пример 1.10 (бариецентрические координаты как отношения площадей)

Согласно правилу Крамера<sup>2</sup>, разложение произвольного вектора  $\overline{ap} \in V$  по базису  $\overline{ab}, \overline{ac}$  имеет вид

$$\overline{ap} = \frac{s(\overline{ap}, \overline{ac})}{s(\overline{ab}, \overline{ac})} \cdot \overline{ab} + \frac{s(\overline{ab}, \overline{ap})}{s(\overline{ab}, \overline{ac})} \cdot \overline{ac} = \frac{s(apc)}{s(abc)} \cdot \overline{ab} + \frac{s(abp)}{s(abc)} \cdot \overline{ac}.$$

Поэтому бариецентрические координаты  $(\alpha, \beta, \gamma)$  точки  $p$  относительно  $\Delta abc$  равны

$$\gamma = \frac{s(abp)}{s(abc)}, \quad \beta = \frac{s(pca)}{s(abc)}, \quad \alpha = 1 - \beta - \gamma = \frac{s(abc) - s(abp) - s(pca)}{s(abc)} = \frac{s(pbc)}{s(abc)},$$

<sup>1</sup>Т. е. лежащие справа по ходу движения.

<sup>2</sup>См. сл. 1.3 на стр. 12.

т. е. являются отношениями площадей треугольников с вершиной  $p$  и основаниями на сторонах  $\Delta abc$  к площади треугольника  $\Delta abc$ , ориентированных так, что стороны  $\Delta abc$  проходятся в одном направлении как при обходе самого  $\Delta abc$ , так и при обходе каждого из треугольников с вершиной в точке  $p$ :

$$p = \frac{s(pbc)}{s(abc)} \cdot a + \frac{s(apc)}{s(abc)} \cdot b + \frac{s(abp)}{s(abc)} \cdot c. \quad (1-20)$$

ПРИМЕР 1.11 (ЦЕНТР ТРЕУГОЛЬНИКА)

Равновесный барицентр  $o = (a + b + c)/3$  вершин треугольника  $\Delta abc$  называется *центром* этого треугольника. Согласно [упр. 1.8](#) точка  $o$  является центром тяжести любой из вершин и середины противоположной ей стороны, взятой с весом 2. Таким образом,  $o$  является точкой пересечения медиан  $\Delta abc$  и делит каждую из них в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины (см. [рис. 1◊11](#)). Из формулы (1-20) вытекает, что центр треугольника однозначно характеризуется как единственная такая точка  $o$ , для которой  $s(oab) = s(obc) = s(oca)$ .

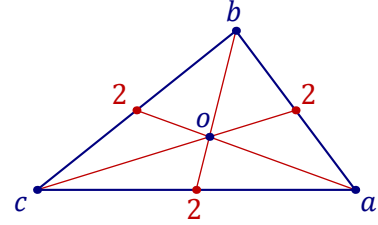


Рис. 1◊11. Центр треугольника.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Равенство  $F(0) = 0$  получается прибавлением вектора  $-F(0)$  к левой и правой части равенства  $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$ . Из равенства  $0 = F(0) = F(v + (-v)) = F(v) + F(-v)$  вытекает, что  $-F(v) = F(-v)$ .

Упр. 1.4. Ответ:  $v = y_1 w_1 + y_2 w_2$ , где  $y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$ ,  $y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$ .

Упр. 1.5. Первое следует из выкладки  $0 = f(a + b, a + b) = f(a, b) + f(b, a)$ , второе — из выкладки  $f(v, v) = -f(v, v)$ .

Упр. 1.6. Первое следует из того, что по правилу треугольника  $\overline{aa} + \overline{ab} = \overline{ab}$  для любого вектора  $\overline{ab} \in V$ , второе — из того, что  $\overline{pq} + \overline{qp} = \overline{pp} = 0$ , третье — из того, что при  $\overline{ab} = \overline{dc}$  имеем  $\overline{bc} = \overline{ba} + \overline{ad} + \overline{dc} = -\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{dc} = \overline{ad}$ .

Упр. 1.8. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$(\mu + \nu)^{-1}(\mu p + \nu q) = (\mu + \nu)^{-1} \left( \sum_i \mu_i p_i + \sum_j \nu_j q_j \right).$$

Второе — выкладкой

$$\sum_{i=1}^m y_i p_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} q_{ij} = \sum_{ij} z_{ij} q_{ij},$$

где  $z_{ij} = y_i x_{ij}$  и

$$\sum_{ij} z_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i = 1.$$

Упр. 1.10.  $s(pab) : s(pbc) = s(\overline{pa}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{pc}) = s(\overline{pa} - \overline{pb}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{pc} - \overline{pb}) = s(\overline{ba}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{bc}) = s(\overline{pb}, \overline{ab}) : s(\overline{pb}, \overline{pc}) = \overline{ab} : \overline{bc}$ .