Задачи для подготовки к контрольной № 1

ПК1◇1. Найдите площадь треугольника, образованного на аффинной плоскости $\mathbb{Q}^2$ прямыми

а) $28x_1 - 4x_2 = 16\,, \quad -13x_1 + 2x_2 = -8\,, \quad -41x_1 + 6x_2 = -20\,.$

б) $14x_1 - 7x_2 = -49\,, \quad 17x_1 - 8x_2 = -57\,, \quad 3x_1 - x_2 = -1\,.$

ответ: в (а) координаты вершин: $(0,-4)$, $(4,24)$, $(-2,-17)$, площадь равна 2; в (б) координаты вершин: $(-1,5)$, $(6,19)$, $(7,22)$, площадь равна $7/2$.

ПК1◇2. Нарисуйте на вещественной аффинной плоскости фигуру, задаваемую в барицентрических координатах (α,β,γ) относительно вершин данного $\triangle abc$ неравенствами

а) $2\beta - \gamma \geqslant -2\,, \quad -\alpha + 2\gamma \geqslant -2\,, \quad 2\alpha - \beta \geqslant -2$

б) $\frac{4\beta}{3} - \frac{\gamma}{2} \geqslant -\frac{2}{3}\,, \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{3\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{4}\,, \quad \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} \geqslant -\frac{1}{6}\,.$

ПК1◇3. Найдите образ точки $(3,-2)$ при аффинном преобразовании плоскости $\mathbb{R}^2$, переводящем точки $(1,2)$, $(-2,-4)$, $(2,5)$ соответственно в точки $(1,-5)$, $(-8,7)$, $(5,-10)$.

ответ: $(-1,-5)$.

ПК1◇4. Найдите образ точки $(27,15)$ при аффинном преобразовании плоскости $\mathbb{R}^2$, переводящем точки $(-3,3)$, $(-7,2)$, $(-9,-3)$ соответственно в точки $(-1,2)$, $(-6,5)$, $(-13,2)$.

ответ: $(41,-16)$.

ПК1◇5. Вершины $\triangle abc$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ имеют координаты $a = (2,1)$, $b = (0,7)$, $c = (5,-7)$. Напишите уравнение биссектрисы внутреннего угла a.

ответ: $x_1\left(-16\sqrt{10} + 6\sqrt{73}\right) + x_2\left(-6\sqrt{10} + 2\sqrt{73}\right) = -38\sqrt{10} + 14\sqrt{73}$.

ПК1◇6. Вершины $\triangle\ abc$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ имеют координаты $a = (2,0)$, $b = (7,3)$, $c = (3,-3)$. Найдите расстояние от вершины a до срединного перпендикуляра к стороне $[b,c]$.

ответ: $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

ПК1◇7. Найдите косинус угла между диагоналями KM и LN у выпуклого четырёхугольника $KLMN$ на евклидовой плоскости, если $|K,L| = 2\sqrt{5}$, $|L,M| = \sqrt{2}$, $|M,N| = 2$ и $\cos\measuredangle KLM = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\measuredangle LMN = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ответ: $\overrightarrow{MN} = 1\cdot\overrightarrow{LK} + 2\cdot\overrightarrow{LM}$, $(\overrightarrow{LK},\overrightarrow{MN}) = 8$, $\cos\measuredangle(\overrightarrow{LN},\overrightarrow{KM}) = -\frac{\sqrt{17}}{17}$.

ПК1◇8. Найдите косинус угла между диагоналями KM и LN у выпуклого четырёхугольника $KLMN$ на евклидовой плоскости, если $|K,L| = 1$, $|L,M| = \sqrt{2}$, $|M,N| = \sqrt{10}$ и $\cos\measuredangle KLM = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\measuredangle LMN = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

ответ: $\overrightarrow{MN} = 2\cdot\overrightarrow{LK} + 3\cdot\overrightarrow{LM}$, $(\overrightarrow{LK},\overrightarrow{MN}) = -1$, $\cos\measuredangle(\overrightarrow{LN},\overrightarrow{KM}) = \frac{4}{5}$.