Образцы задач, которые могут быть на коллоквиуме

Задача 1. Нетождественное аффинное преобразование коммутирует со всеми сдвигами. Верно ли, что тогда и само оно — сдвиг?

Задача 2. Верно ли, что любые три различные параллельные прямые на аффинной плоскости можно перевести аффинным преобразованием в любые три другие различные параллельные прямые? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

Задача 3. Верно ли, что биективное аффинное преобразование, дифференциал которого не имеет ненулевых неподвижных векторов, обязательно имеет неподвижную точку?

Задача 4. Пусть аффинное преобразование $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таково, что $\varphi^m = \mathrm{Id}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что φ имеет неподвижную точку.

Задача 5. Напишите направляющие векторы биссектрис углов, возникающих при пересечении прямых $2x - y = 5$ и $3y + x = 2$ на евклидовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 6. Напишите уравнение прямой, симметричной прямой $2x - y = 5$ относительно прямой $3y + x = 2$ на евклидовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 7. Выразите через длины сторон $\triangle abc$ барицентрические координаты относительно вершин $\triangle abc$ центра вписанной в $\triangle abc$ окружности.

Задача 8. Покажите, что в счётномерном пространстве всякое подпространство конечномерно или счётномерно, а всякое несчётное множество векторов линейно зависимо.

Задача 9. Во время своего нашумевшего тура по Зазеркалью Алиса совершила экскурсию по трёхмерной поверхности четырёхмерного куба[1] в ходе которой покидала каждую комнату через лаз в **а)** полу **б)** в противоположной стене к той, через которую проникла в эту комнату. В скольких комнатах она в итоге побывала?

Задача 10. В четырёхмерном аффинном пространстве заданы непересекающиеся двумерная плоскость $\Pi = q + U$ и прямая ℓ с вектором скорости $v \notin U$. Заметают ли прямые (ab) с $a \in \ell$, $b \in \Pi$ всё пространство?

Задача 11. Обозначим через A, B, C, D, E концы стандартных базисных векторов в $\mathbb{R}^5$, а через X — середину отрезка, соединяющего центры треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$. Проходящая через X прямая YZ имеет точку Y на прямой AE, а точку Z — в плоскости BCD. Найдите $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ}$.

Задача 12. Пусть точка P лежит строго внутри[2] невырожденного симплекса $ABCDE \subset \mathbb{R}^4$. Можно ли провести через P

- **а)** двумерную плоскость, не пересекающую ни одной прямой, проходящей через какие-нибудь две вершины симплекса $ABCDE$
- **б)** двумерную плоскость, не пересекающую ни одной двумерной плоскости, проходящей через какие-нибудь три вершины симплекса $ABCDE$
- **в)** прямую, не пересекающую ни одной двумерной плоскости, проходящей через какие-нибудь три вершины симплекса $ABCDE$?

Задача 13. В векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$ задан конечный набор двумерных векторных подпространств. Всегда ли найдётся двумерное подпространство, трансверсальное ко всем подпространствам из заданного набора?

Задача 14. Сколько прямых в n-мерном аффинном пространстве над полем из q элементов? А сколько (невырожденных) треугольников на плоскости? А сколько плоскостей в

[1] Которая, как известно, представляет собою набор обычных трёхмерных кубических комнат, причём в каждой из шести стен каждой из комнат имеется лаз в соседнюю комнату.

[2] Т. е. является барицентрической комбинацией точек A, B, C, D, E со строго положительными весами.

m-мерном аффинном пространстве?

Задача 15. Может ли поле из 27 элементов содержать подполе из 9 элементов?

Задача 16. Может ли двумерное векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа прямых? Более общие вопросы: может ли векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа векторных подпространств коразмерности 1? А конечного числа подпространств произвольных положительных коразмерностей?

Задача 17. Векторное подпространство $V \subset \Bbbk[x]$ содержит многочлены каждой из степеней от нуля до m. Верно ли, что оно содержит все многочлены степени $\leqslant m$?

Задача 18. Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ — два поля, и $\mathbb{F}$ — конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Верно ли, что любой элемент поля $\mathbb{F}$ является корнем некоторого многочлена из $\Bbbk[x]$?

Задача 19. Дано $m+1$ попарно разных чисел $a_0, a_1, \dots, a_m \in \Bbbk$. Постройте в пространстве многочленов степени $\leqslant m$ и коэффициентами из $\Bbbk$ такой базис, в котором координатами многочлена f являются **а)** значения f в точках a_i **б)** значения f и его первых m производных в точке a_0. Много ли существует таких базисов?

Задача 20. Покажите, что множество 2^M всех подмножеств данного множества M образует векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2) = \{0, 1\}$ относительно операций

$$X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \smallsetminus (X \cap Y), \quad 1 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} X \quad \text{и} \quad 0 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing .$$

В предположении, что множество M конечно, постройте в пространстве 2^M какой-нибудь базис и найдите $\dim 2^M$. Всякое ли семейство таких подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n \subset M$, что $X_i \not\subset \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, линейно независимо?

Задача 21. Покажите, что для любых пяти различных точек на координатной плоскости $\Bbbk^2$ существует кривая второй степени[3], проходящая через эти пять точек.

Задача 22. Квадратная вещественная матрица называется *бистохастической*, если сумма элементов в каждой её строке и каждом её столбце равна единице. Верно ли, что произведение бистохастических матриц всегда является бистохастической матрицей?

[3] Т. е. фигура, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где $f \in \Bbbk[x, y]$ — многочлен степени 2.