Геометрия, лекция 10 декабря 2020г (вторая половина)

Примеры: есть 3×3 матрица A с собственными числами $1, 2, 3$.

Найти какую-нибудь матрицу X : $X^5 = A$.

Рассмотрим функцию $\sqrt[5]{t}$ из алгебры $\mathcal{A}$ всех функций $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, которые раскладываются в сходящийся ряд Тейлора вблизи точек $1, 2, 3$

$$ev_A : \sqrt[5]{t} \longmapsto \sqrt[5]{A} = P_{A,\sqrt[5]{t}}(A)$$

интерполяционный многочлен

$$P_{A,\sqrt{t}}(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$$

$t=1$ $\rho_{A,\sqrt[5]{t}}(1) = \sqrt[5]{1}$

$t=2$ $\rho_{A,\sqrt[5]{t}}(2) = \sqrt[5]{2}$

$t=3$ $\rho_{A,\sqrt[5]{t}}(3) = \sqrt[5]{3}$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \alpha+2\beta+4\gamma = \sqrt[5]{2} \\ \alpha+3\beta+9\gamma = \sqrt[5]{3} \end{cases}$$

решаем по правилу Крамера и получаем всё

$$\sqrt[5]{A} = \alpha + \beta A + \gamma A^2$$

решение линейных рекуррентных ур-й:

По заданным $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ найти последовательность (a_k) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ удовлетворяющую "линейному рекур. уравнению n-го порядка":

$$\boxed{a_m = \alpha_1 a_{m-1} + \alpha_2 a_{m-2} + \dots + \alpha_n a_{m-n}}$$

$\forall m \geq n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

"найти" = выразить a_m через m явно.

$$\begin{tikzcd}(a_{m-n+1}, \dots, a_m) \in k^n \arrow[d] \\ (a_{m-n+1}, \dots, a_m)\end{tikzcd}$$

$$= (a_{m-n}, \dots, a_{m-1}) \cdot S$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \alpha_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

матрица сдвига на один шаг

Ответ: $(a_{m-n+1}, \dots, a_m)$

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \cdot S^{m-n}$$

конкретно: $a_0 = 1 \quad a_1 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$(a_n, a_{n+1}) = (a_{n-1}, a_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (a_{n-2}, a_{n-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= (a_0, a_1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

a_n – 1я координата вектора

$$(1,1)\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n}$$

$$S = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$S^n = \alpha E + \beta S$$, где $p(t) = \alpha + \beta t$

таков, что на корнях характеристического многочлена $\chi_S(t) = t^2 - \mathrm{tr}\, S\cdot t + \det S =$

$$= t^2 - t - 1 =$$

$$= (t-\lambda_+)(t-\lambda_-)$$

$$p(\lambda_\pm) = (\lambda_\pm)^n$$

$$S^n = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} + \beta S = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha+\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha + \beta\lambda_+ = \lambda_+^n\\ \alpha + \beta\lambda_- = \lambda_-^n\end{cases}$$

$$\beta(\lambda_+ - \lambda_-) = \lambda_+^n - \lambda_-^n \qquad \beta = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix}\lambda_+^n & \lambda_+\\ \lambda_-^n & \lambda_-\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}1 & \lambda_+\\ 1 & \lambda_-\end{pmatrix}} = \frac{\lambda_+^n\lambda_- - \lambda_-^n\lambda_+}{\lambda_- - \lambda_+}$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(1,1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha+\beta \end{pmatrix} = (\alpha+\beta, \ *).$$

Упр: сосчитать аккуратно

Теорема: [разложение Жордана]

над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ $\forall$ линейного оператора F на конечномерном векторном пр-ве V

$\exists!$ пара операторов F_d, F_n :

(1) F_d диагонализуем

(2) F_n нильпотентен

(3) $F = F_d + F_n$

(4) $F_d F_n = F_n F_d$.

Более того, F_d и F_n являются многочленами без свободного члена от оператора F, в частности, они перестановочны с любым оператором, который перестановочен с F.

Док-во: $\chi_F(t) = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, F} (t-\lambda)^{m_\lambda}$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, F} K_\lambda, \quad K_\lambda = \underline{\ker (F-\lambda E)^{m_\lambda}}$$

F_d — это диагональный оператор, действующий на каждом K_λ как умножение на λ

F_n — это нильпотентный оператор, действующий на каждом K_λ

как $(F - \lambda E)$

$$F_n\big|_{K_\lambda} = (F - \lambda E)\big|_{K_\lambda} \Rightarrow \left(F_n\big|_{K_\lambda}\right)^{m_\lambda} = 0$$

$$F\big|_{K_\lambda} = \underbrace{\lambda E\big|_{K_\lambda}}_{F_d|_{K_\lambda}} + \underbrace{(F - \lambda E)\big|_{K_\lambda}}_{F_n|_{K_\lambda}.}$$

как получить F_d и F_n в виде многочленов от F без свободного члена?

$$F_d = p(F)$$

$$\begin{cases} p(t) \equiv \lambda \mod (t-\lambda)^{m_\lambda} & \forall \lambda. \\ p(t) = t \cdot h(t) \end{cases}$$

$\forall \lambda$ можно найти $h_\lambda(t)$:

$$t \cdot h_\lambda(t) \equiv \lambda \mod (t-\lambda)^{m_\lambda}$$

если $\lambda \neq 0$ $[t]$ обратим в $\frac{\mathbb{K}[t]}{((t-\lambda)^{m_\lambda})}$

$$[h_\lambda] = [\lambda] / [t] \quad \text{в} \quad \frac{\mathbb{k}[t]}{((t-\lambda)^{m_\lambda})}$$

если $\lambda = 0$: $h_\lambda(t) = 0$.

$\forall \lambda$:

$$p_\lambda(t) = t \cdot h_\lambda(t) \equiv \lambda \mod (t-\lambda)^{m_\lambda}$$

По К.Т.О. $\exists$ многочлен p, делящийся на t и такой, что

$p(t) \equiv \lambda \mod (t-\lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех λ.

$p(F)\big|_{K_\lambda} = \lambda E\big|_{K_\lambda}$ сразу для всех λ. $\Rightarrow p(F) = F_d$

единственность: если есть ещё одно разложение:

$$F = \underbrace{F_d + F_n}_{\text{то, что уже построили}} = F_d' + F_n'$$

$F_d' F_n' = F_n' F_d' \Rightarrow F_d'$ и F_n' перестановочны с $F \Rightarrow F_d'$ и F_n' перестановочны с F_d и F_n (которые явл. многочленами от F)

$F_d F_d' = F_d' F_d \Rightarrow F_d'$ переводит все собственные подпр-ва V_λ оператора F_d (по построению, они те же, что у F) в себя. F_d' диагонализуем на каждом из них. $\Rightarrow$ все собственные значения F_d' на V_λ обязаны быть равны λ, т.к. если есть $\mu \neq \lambda$ у F_d',

то $F_d - F_d'$ имеет собств. число

$(\lambda - \mu) \neq 0$

$$\boxed{F_d - F_d' = F_n' - F_n}$$

т.к. $F_d + F_n = F = F_d' + F_n'$

$F_n' - F_n$ нильпотентен !

$$(F_n')^m = (F_n)^m = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(F_n' - F_n)^{2m} = 0$$

$$\Rightarrow F_d'\big|_{V_\lambda} = \lambda E \Rightarrow F_d' = F_d \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} F_n' & = & F_n \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ F - F_d' & & F - F_d. \end{array}$$

---

17 декабря в $\underline{\underline{9^{00}}}$

контрольная №3

23 декабря в 11^{00}

письменный экзамен.

подробности см. в $\underline{\underline{\text{LMS}}}$.

$\boxed{\text{edu.hse.ru}}$

(1) Решение надо загрузить на сайт

(2) Обязательно нажать кнопку

"отправить на проверку"

"отправить для оценивания"