Геометрия, лекция 9 декабря 2020г
(вторая половина)

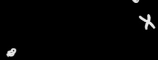
Функции от матриц и операторов

A. найти матрицу X : $X^{10} = A$.

$X = \sqrt[10]{A}$. есть такая функция $\sqrt[10]{t} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.
и мы хотим подставить в неё $t = A$.
Как это сделать?

Часто надо вычислить A^n, например, A^{2020}, т.е. подставить A в функцию $t^n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{R}^2$

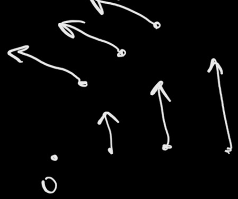


∂

$x \longrightarrow$ вектор Ax приложенный в точке x.

$A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ линейный оператор.

$$A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$



Основная задача теории обыкновенных диф. уравнений: нарисовать такую кривую $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, которая касается

$$t \longmapsto \gamma(t)$$

этого векторного поля, в том смысле, что скорость в каждой точке

$$\dot{\gamma}(t)\Big|_{t=p} = \frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=p} = Ap$$

в точке равна отложенному от этой точки вектору.

$$\boxed{\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

это решен!

Ответ: $x(t) = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$\dot{x}(t) = e^{At} \cdot A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Важная задача: научиться подстав.

матр в функцию $x \longmapsto e^{tx}$

$$\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

значение $x = A$, где A - матрица.

Для начала: матрицы можно подставлять в многочлены, т.е. $\forall$ оператора $F: V \to V$ и любого многочлена $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ определён оператор $f(F): V \to V$.

Т.е. имеется канонический гомоморфизм вычисления

$$ev_F : \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$
$$f(t) \longmapsto [f(F): V \to V].$$

Задача: пусть задана алгебра $\mathfrak{A}$ функций $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, содержащая алгебру многочленов $\mathbb{C}[t]$.

Можно ли продолжить гомоморфизм вычисления $ev_F : \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathrm{End}\, V$

до гомоморфизма алгебр

$$ev_F : \mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{End} V$$

так, что на многочленах будет обычная подстановка F в многочлен.

Если да, то много ли таких продолжений?

Идея: если алгебра $\mathcal{A}$ в том или ином смысле является "замыканием" ("пополнением") алгебры многочленов, то $f(F)$ для любого $f \in \mathcal{A}$ лежит в "замыкании" или "пополнении" линейной оболочки операторов

$$\underbrace{\langle E, F, F^2, F^3, \ldots \rangle}_{\text{конечномерное пр-во.}}$$

мы собираемся разрешить линейные комбинации операторов F^k и пределы последовательностей таких операторов.

$$\Downarrow$$

Мораль: любые функции от оператора F является многочленом от F степени не выше $\dim V$.

- Свойства алгебры функций $\mathcal{A}$, которые надо наложить, чтобы вычисление $ev_F : \mathbb{C}[t] \to \operatorname{End} V$ продолжалось на $\mathcal{A}$.

Пусть $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

аннулируется многочленом

$$q(t) = \prod_{\lambda} (t-\lambda)^{m_\lambda}$$

λ пробегает попарно различные значения (все различные корни многочлена $q(t)$).

над $\mathbb{C}$ любой многочлен таков.

над $\mathbb{R}$ это реальное ограничение.

Условие на $\mathcal{A}$:

- каждая функция $f \in \mathcal{A}$ должна быть определена в некотором открытом множестве, содержащем все корни λ многочлена $g(t)$.

- $\forall$ корня λ кратности m_λ каждая функция $f \in \mathcal{A}$ должна в некоторой окрестности числа λ допускать разложение Тейлора в форме Лагранжа до порядка m_λ, т.е.

$$f(t) = f(\lambda) + f'(\lambda)(t-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(t-\lambda)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}(t-\lambda)^{m-1} + g(t)\cdot(t-\lambda)^m$$

где $g \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A} \supset \mathbb{C}[t]$

При этих условиях $\exists!$ гомоморфизм

$$ev_F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{End}(V) :$$

$$ev_F(f) = f(F) \quad \forall f \in \mathbb{C}[t].$$

Примеры таких алгебр:

Самый банальный: функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ представимые в окрестности каждого λ сходящимся степенным рядом.

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k (z-\lambda)^k$$

$\uparrow$ этот ряд абсолютно сходится в некотором круге

В частности, этому условию удовлетворяет алгебра аналитических функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — суммы всюду сходящихся степенных рядов:

$$e^z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$$

$\sin z, \ \cos z, \ \ldots$