Геометрия, лекция 3 декабря 2020г
(вторая половина)

Теорема о разложении

Пусть $F: V \to V$ пр-во с оператором и пусть $q(t) \in \Bbbk[t]$ таков, что $q(F)=0$ и $q(t)=\underline{q_1(t)\,q_2(t)\dots q_m(t)}$, где $\text{НОД}(q_i, q_j)=1$ $\forall\, i\neq j$. Положим $Q_i(t)=\dfrac{q(t)}{q_i(t)}=\prod\limits_{\nu\neq i} q_\nu(t)$. Тогда:

$\forall i$ $\ker q_i(F)=\operatorname{im} Q_i(F)$, эти подпр-ва F-инварианты, и V является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Пример: $F^2=F$ Такие F называются идемпотентами или проекторами

$F(F-\mathrm{Id})$

$\ker F = \operatorname{im}(F-\mathrm{Id})$, $\operatorname{im} F = \ker(F-\mathrm{Id})$.

$$V = \ker F \oplus \underbrace{\ker(F-\mathrm{Id})}_{\operatorname{im} F}$$

↑ F тождественно действует на im F.

F − проектирует V на im F вдоль ker F.

$$q(t) = q_1(t)\dots q_m(t) = q_i(t)\cdot Q_i(t).$$

$q(F)=0$ $\underbrace{\operatorname{im} Q_i(F) \subset \ker q_i(F)}$

$\underbrace{q_i(F)}\,\underbrace{Q_i(F)}=0$

Надо доказать 2 вещи:

(1) $V = \sum \operatorname{im} Q_i(F)$

(2) $\ker q_i(F)$ составляют прямую сумму

$$\underbrace{\ker q_i(F)} \cap \sum_{\nu \neq i} \ker q_\nu(F) = 0$$

Все многочлены $Q_i(t)$ в совокупности взаимно просты, т.е. НОД $(Q_1,\dots,Q_m)=1$

$$\exists\, h_1,\dots,h_m \in \Bbbk[t] : \sum Q_i h_i = 1$$

$\downarrow$ подставим сюда $t=F$ и применим к произвольному вектору.

$$Q_1(F)h_1(F)+\dots+Q_m(F)h_m(F)=\mathrm{Id}$$

$$\sum Q_i(F)h_i(F)v = \mathrm{Id}(v)=v$$

$$\cap$$

$$\sum \operatorname{im} Q_i(F)$$

это доказывает (1).

(2) НОД $(q_i, Q_i)=1 \Rightarrow \exists\, g,h:$

$$g\cdot q_i + h\cdot Q_i = \underline{\underline{1}}.$$ подставим $t=F$

и применим к любому вектору

$$v \in \underbrace{\ker q_i(F)} \cap \underbrace{\sum_{j\neq i} \ker q_j(F)}$$

$$v = g(F)\underset{0}{\cancel{q_i(F)v}} + h(F)\underset{0}{\cancel{Q_i(F)v}} = 0$$

$v \in \ker q_i(F)$ $\qquad$ $Q_i(F)=\prod_{j\neq i} q_j(F)$

$v \in \sum \ker q_i(F)$

Теорема доказана

Следствие: теорема о корневом разложении.

Пусть оператор F аннулируется многочленом, полностью разложенным на линейные множители

$$q(t) = \prod_{\lambda} (t-\lambda)^{m_\lambda}$$

где λ пробегает множество всех различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ многочлена q в $\Bbbk$.

Тогда $V = \bigoplus \underbrace{\ker (F-\lambda E)^{m_\lambda}}_{K_\lambda}$

корневые подпр-ва

Характеристический многочлен

$$\chi_F(t) = \det(tE - F_e).$$

где F_e — это матрица оператора F в каком-нибудь базисе e пр-ва V.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{По теореме Гамильтона - Кэли}\\ \qquad \chi_F(F) = 0\end{array}}$$

Факт: $\det(tE - F_e)$ не зависит от выбора базиса

$$F_f = C_{fe} F_e C_{ef} = C_{fe} F_e C_{fe}^{-1}$$

$\det(tE - A)$ не меняется при замене $A \longrightarrow CAC^{-1}$

$$\det(t\underset{\substack{\parallel \\ CC^{-1}}}{E} - CAC^{-1}) = \det(C(tE-A)C^{-1}) = \underbrace{\det C \cdot \det C^{-1}}_{1} \cdot \det(tE-A)$$

У подобных операторов одинаковые характеристические многочлены

Самое простое инвариантное подпр-во — одномерное.

Вектор $v \in V$, $v \neq 0$ порождает такое подпр-во, если $Fv = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$. Такой $v \neq 0$ называется **собственным** с **собственным значением** λ (собственным числом λ).

$$Fv = \lambda v$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda E - F)v = 0$$

v собств. с собств. значением $\lambda \iff$

$$v \in \ker(\lambda E - F).$$

$$\ker(\lambda E - F) \neq 0 \iff \det(\lambda E - F) = 0$$

Собственные числа оператора F — это в точности корни характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$

Следствие Над алг. замкнутым полем у любого оператора есть ненулевой собств. вектор.

$$\xcancel{\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}}$$

Множество собственных чисел оператора F обозначается Spec F и называется **спектром** оператора F

$$\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(F)=\{\lambda\in\Bbbk \mid \chi_F(\lambda)=0\}$$

Для каждого $\lambda\in\mathrm{Spec}(F)$ подпр-во

$$V_\lambda=\{v\in V \mid Fv=\lambda v\}=\ker(\lambda E-F)$$

называется **собственным подпр-вом** оператора F с собств. числом λ

Факт: $\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Spec}_F} V_\lambda$ **прямая**.

Док-во: Надо проверить, что $\forall$ набор собственных векторов $v_1, \dots, v_m$ с попарно разными собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ линейно независим. Рассмотрим самую короткую линейную зависимость. Занумеруем векторы так, чтобы эта зависимость имела вид:

$$(*) \quad v_k = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_{k-1} v_{k-1}$$

$$\downarrow F$$

$$(**) \quad \lambda_k v_k = x_1 \underline{\underline{\lambda_1}} v_1 + x_2 \lambda_2 v_2 + \dots + x_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{(**) - (*) \cdot \lambda_k}$$

$$\downarrow$$

$$0 = x_1 \underset{\overset{\shortparallel}{0}\!\!\!\!/}{(\lambda_1 - \lambda_k)} v_1 + \dots + x_{k-1} \underset{\neq 0}{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)} v_k$$

противоречие!

Следствие: $\sum \dim V_\lambda \leq \dim V$

Диагонализуемые операторы

F называется диагонализуемым, если он записывается диагональной матрицей в некотором базисе

$$F_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\det(tE - F_e) = \prod (t - \lambda_i)$$

Диагональные элементы — это в точности собств. числа, и каждое из них встречается столько раз, какова кратность соотв. корня λ в $\chi_F(t)$.

С точностью до перестановки диагональ. элементов, диагональная матрица диагонализуемого оператора не зависит от выбора базиса.

Критерий диагонализуемости:

Следующие св-ва оператора $F: V \to V$

равносильны:

(1) F диагонализуем

(2) V порождается собственными векторами оператора F

(3) $\dim V_\lambda$ = кратности корня λ характеристического многочлена и $\chi_F(t)$ полностью разлагается на лин. множители

(4) F можно аннулировать многочленом, который является произведением попарно разных линейных множителей.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) очевидно.

$$\sum \dim V_\lambda = \dim V$$

(3) $\Rightarrow$ (4) $V = \bigoplus V_\lambda \Rightarrow \prod\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (F - \lambda E) = 0$

(4) $\Rightarrow$ (1) по теореме о разложении.

$$(F - \lambda_1 E)(F - \lambda_2 E) \dots (F - \lambda_s E)$$

$$V = \bigoplus \ker (F - \lambda_i E)$$

тех что отличны от нуля