Геометрия, лекция 26 ноября 2020г (первая половина)

Алгебра грассмановых многочленов

$$\Bbbk\langle \xi_1,\dots,\xi_n\rangle \qquad \left\{\begin{array}{l} \xi_i\wedge\xi_j = -\xi_j\wedge\xi_i \\ \xi_i\wedge\xi_i = 0 \\ \qquad\quad \forall\, i,j \end{array}\right.$$

Базис состоит из мономов

$\xi_I = \xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_k}$, где $I = i_1<i_2<\dots<i_k$.

$$\xi_I\wedge\xi_J = \left[\begin{array}{ll} 0 & \text{если } I\cap J\neq\emptyset \\ \underline{\underline{\mathrm{sgn}(I,J)}}\cdot\xi_{I\sqcup J} & \text{если } I\cap J=\emptyset \end{array}\right.$$

знак перестановки, которая упорядочивает набор $i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_m$ по возрастанию номеров

Если $I\sqcup J=\{1,\dots,n\}$, $I\cap J=\emptyset$

$$\begin{gathered} \mathrm{sgn}(i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{n-k}), \text{ где } \begin{array}{l} i_1<\dots<i_k \\ j_1<\dots<j_{n-k} \end{array} \\ \shortparallel \\ (-1)^{|I|+\frac{k(k+1)}{2}}, \text{ где } |I| = i_1+i_2+\dots+i_k \end{gathered}$$

„вес" индекса I.

I состоит из k индексов

J состоит из n-k индексов

$$* \quad \xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} 0, & \text{если } J \neq \bar{I} = \{1,\dots n\} \setminus I \\ \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \cdot (-1)^{|I| + \frac{k(k+1)}{2}} & \end{cases}$$

Если делается линейная замена переменных $(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \dots, \eta_n) \cdot A$

то базисные мономы ξ_J выражаются через базисные мономы η_I по правилу:

$I = i_1, \dots, i_r$

$K = k_1, \dots, k_r$

$$** \quad \boxed{\xi_I = \sum_K \eta_K a_{KI}}$$

где $a_{KI} = \det A_{KI}$ ← подматрица матрицы A живущая в строках $K = k_1, \dots, k_r$ и столбцах $I = i_1, \dots, i_r$.

KI - минор

K пробегает k - элементные возрастающие подмножества в $\{1, \dots, n\}$

Если подставить (**) в (*)

$$\underbrace{\Big(\sum_{K}\eta_K a_{KI}\Big)}_{\xi_I}\wedge\underbrace{\Big(\sum_{L}\eta_L a_{LJ}\Big)}_{\xi_J} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I = i_1 \ldots i_r \\ K = k_1 \ldots k_r \\ L = l_1, \ldots, l_{n-r} \end{array}} \qquad = \begin{cases} 0, \text{ если } J \neq \bar{I} \\ \underbrace{\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_n}_{\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_n\cdot\det A\cdot(-1)^{|I|+\frac{r(r+1)}{2}}} \end{cases}$$

В левой части получим:

$$\sum_{K L}\underbrace{\eta_K\wedge\eta_L}_{\begin{cases}0 & L\neq\bar{K}\\ \eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_n\cdot(-1)^{|K|+\frac{r(r+1)}{2}}\end{cases}}\cdot a_{KI}a_{LJ} =$$

$$=\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_n\cdot\sum_{K}(-1)^{|K|+\frac{r(r+1)}{2}}a_{KI}a_{\bar{K}J}$$

$$\sum_{K}(-1)^{|K|+|I|}a_{KI}a_{\bar{K}J}=\begin{cases}0, \text{ если } J\neq\bar{I}\\ \det A, \text{ если } J=\bar{I}\end{cases}$$

соотношения Лапласа (формула

для разложения определителя по набору

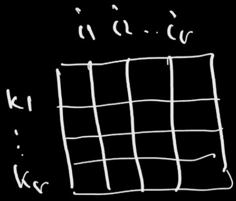
столбцов I:

$$\boxed{\det A = \sum_K (-1)^{|K|+|I|} a_{KI} a_{\bar K \bar I}}$$

и теорема об умножении на чужие алг. дополнения:

$$0 = \sum_K (-1)^{|K|+|I|} a_{KI} a_{\bar K J}$$

если $J \neq \bar I$



берём все $r \times r$ подматрицы A_{KI} сосредоточенные в столбцах I.

такие подматрицы нумеруются индексом $K = (k_1, \dots, k_r)$.

$$a_{KI} = \det A_{KI} \quad a_{\bar K \bar I} = \det A_{\bar K \bar I}$$

$(-1)^{|K|+|I|} a_{\bar K \bar I}$ называется алгебраическим дополнением к минору a_{KI}

При $r = 1$ $\quad I = i \quad \bar I = \{1, \dots, n\} \setminus i$

получаем формулу для разложения по столбцу.

$k \qquad k+i$

$$\det A = \sum_{k=1} a_{ki} \cdot (-1) \det A_{\bar{k}\bar{i}}$$

Если заменить A на A^T, то получаем формулы Лапласа для разложения определителя по набору строк

$$\boxed{\det A = \sum_{K} a_{IK}\, a_{\bar{I}\bar{K}} (-1)^{|I|+|K|}}$$

для любого фиксированного набора строк $I \subset \{1, \dots, n\}$

Пример:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

$A \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}$

Пусть A_{ij} – 2×2 минор, живущий в столбцах i и j

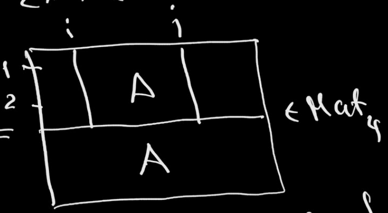
$$A_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} \quad A_{13} \quad A_{14} \quad A_{23} \quad A_{24} \quad A_{34}$$

Вопрос: Для любых ли 6 чисел существует матрица 2×4 с такими минорами?

Ответ: нет!

$B =$



$\det B = 0 =$ (разложим по первым двум строчкам)

$$+A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23}$$

$$\boxed{A_{12} = b_{\underset{I}{12}\,\underset{K}{12}} \qquad A_{13} = b_{\underset{I}{12}\,\underset{K}{13}} \qquad A_{14} = b_{\underset{I}{12}}\, b_{\underset{K}{14}}}$$

$$+A_{23}A_{14} - A_{24}A_{13} + A_{34}A_{12}$$

$$12,23 \qquad 12,24 \qquad 12,34$$

$$2(A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23}) = 0$$

$\boxed{\mathrm{char}\, k \neq 2}$ Соотношение Плюккера:

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$$

Упр.: Проверить, что это условие достаточно для того, чтобы числа A_{ij} были 2×2 минорами 2×4 матрицы.

Идея:

$A_{12}\neq 0$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{A_{23}}{A_{12}} & x \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{array}$$

A_{24} $\qquad$ A_{34}

x должен удовлетворять **двум** условиям

$$\begin{cases} -\dfrac{A_{23}A_{14}}{A_{12}} - A_{13}\cdot x = A_{34} \\ -A_{12}x = A_{24} \qquad x = -\dfrac{A_{24}}{A_{12}} \end{cases}$$

Соотношение Плюккера обеспечивает непротиворечивость:

$$\boxed{-\frac{A_{23}A_{14}}{A_{12}} + \frac{A_{13}A_{24}}{A_{12}} = A_{34}}$$