Геометрия, лекция 19 ноября 2020г (вторая половина)

Правило Крамера N2

Как решать систему

$$n \begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_1 = 0 \\ \ldots \qquad \vdots \\ \underbrace{a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0}_{n+1} \end{cases}$$

$Ax = 0$

$n+1$ перем.

n уравнений

$A =$

$= (a_{ij})$

$1 \le i \le n$

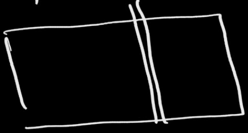
$0 \le j \le n$

Строки матрицы A, если линейно независимы, то порождают n-мерное пр-во в $(\mathbb{k}^{n+1})^*$

$\mathrm{Ann}\, A \subset k^{n+1}$ — одномерен

Как найти базисное решение?

$A_i =$



без i-го столбца.

матрица размера $n \times n$

Теорема: Вектор $\alpha = (\det A_0, -\det A_1, \dots, (-1)^n \det A_n)$

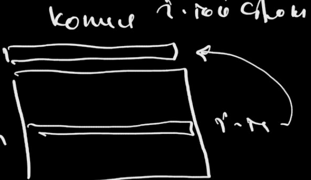
определители всех матриц A_i с чередующимися знаками.

Ненулевой $\Leftrightarrow$ система невырождена (уравнения линейно независимы)

и в этом случае вектор α — базисный вектор в пр-ве решений. !

Идея доказательства!

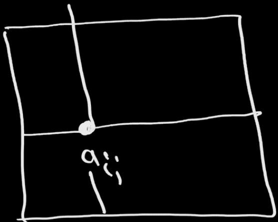
$\tilde{A} = n$



$\det \tilde{A} = 0$ (две одинаковых $\overset{n+1}{\text{строчки}}$).

Имеется замечательная формула «разложение определителя по строке»

$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$



$= A_{ij}$ матрица A без i-той строчки и j-того столбца

$(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}

Разложение по строке:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow$$ разложение по 1-й строке выглядит так:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

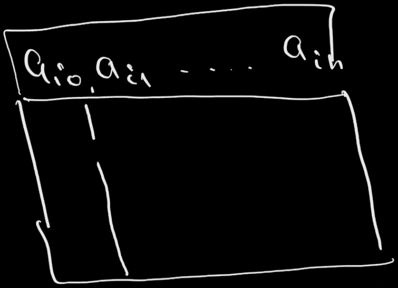
$$a_{11}\cdot(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})$$

$$-a_{12}\cdot(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

$$a_{13}\cdot(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

+ чередуется

det



$= 0$

раскладываю по верхней строке:

$$a_{i0}\cdot\det A_0 - a_{i1}\cdot\det A_1 + \dots = 0$$

$$\downarrow$$

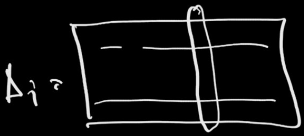
$$(\det A_0, -\det A_1, \dots, (-1)^n\det A_n)$$

решает i-тое уравнение, т.е.

вектор $\alpha = (\det A_0, -\det A_1, \dots)$

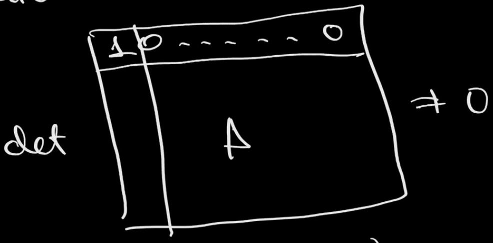
в любом случае — решение.

Если уравнения линейно зависимы ⟹ строки A линейно зависимы ⟹ у всех A_i строки тоже линейно зависимы



$\Rightarrow$ все $\det A_i = 0$ $\Rightarrow$ вектор $\alpha = 0$

Если уравнения линейно независимы, то $\exists$ базис в $(\mathbb{k}^{n+1})^*$, состоящий из этих уравнений и ещё какого-нибудь одного стандартного базисного вектора (по лемме о замене). Пусть этот базисный вектор e_1



разложить по верхней строке :

1. $\det A_0 \neq 0 \Rightarrow \det A_0 \neq 0$

$\alpha \neq 0.$

пересечение 2-мерных подпр-в в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0 \end{cases}$$

Какой базисный вектор в пересечении?

$$v = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -(a_1 b_3 - b_1 a_3), (a_1 b_2 - b_1 a_2)).$$

Как написать уравнение гиперплоскости вида $p + \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{n-1})$ в $\mathbb{K}^n$

$u_1 \dots u_{n-1}$ линейно независимы.

гиперплоскость, прох. через n точек

$P_1, P_2, \dots, P_n$

$p = p_1 \quad u_1 = \overline{p_1p_2} \quad u_2 = \overline{p_1p_3} \ \dots \ u_{n-1} = \overline{p_1p_n}$

$x \in$ гиперплоскости $\Leftrightarrow$ $\overline{px}$ линейно зависим с $u_1, \dots, u_{n-1}$

$$\det(\overline{px}, u_1, \dots, u_{n-1}) = 0$$

↖ линейное уравнение на x

$\overline{px} = x - p$ ↓

$$\det(x, u_1, \dots, u_{n-1}) = \det(p, u_1, \dots, u_{n-1})$$

(точно так же, как мы это делали для прямых в $\mathbb{R}^2$)

$(1,2,3)$ с напр. векторами

$u_1 = (0, 1, 2)$

$u_2 = (0, 2, 3)$

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 2 \\ x_3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

↖ линейное ур-е на x

↑

разложить по
1-му столбцу

Формулы о разложении и т.д

Первичная задача: написать формулу для обратной матрицы к матрице $\underline{\underline{C}}=(c_{ij})$.

C^{-1} существует $\Leftrightarrow \det C \neq 0$

$v = eC$ $\qquad v_1, \dots, v_n$ - столбцы C

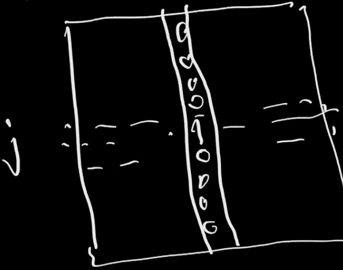
$e = vC^{-1}$ $\qquad B = C^{-1}$ = имеет по столбцам координаты стандартных базисных векторов $e_1, \dots, e_n$ в базисе $v_1, \dots, v_n$

$e_j = b_{1j}v_1 + b_{2j}v_2 + \dots$

b_{ij} = коэфф-ту при v_i в разложении вектора e_j

|| по правилу Крамера №1

$$b_{ij} = \frac{\det(v_1 \dots v_{i-1}\, e_j\, v_{i+1} \dots v_n)}{\det(v_1 \dots v_n)} \overset{?}{=} \frac{}{\det C}$$



поставить 1 в левый верхний угол?

$i-1$ транспозиций столбцов

$j-1$ транспозиция стро[к]

если этот крест вычеркнуть, то получаем матрицу $\underline{\underline{C_{ji}}}$

$$\det(v_1 \dots v_{i-1}\, e_j\, v_{i+1} \dots v_n) = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} 1 & * \\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\end{matrix} & C_{ji} \end{bmatrix}$$

g должна оставлять 1 на месте если она даёт ≠0 вклад

$= (-1)^{i+j} \det C_{ji}$

присоединённая матрица
"
матрица, транспонир. к матрице алгебраических дополнений

Вывод: $C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot C^{\vee}$

!!

$C^{\vee}_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ji}$

алгебраическое дополнение до элемента c_{ji} матрицы C

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

алг. доп к c

алг доп к b.