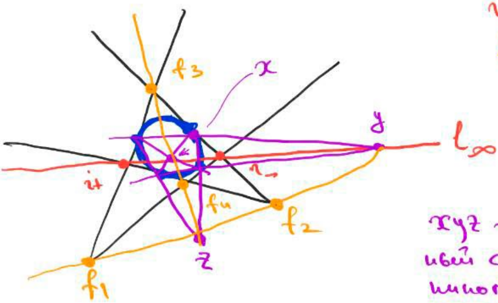
Лекция 28.04.

В четверг 30 апреля в 10^{00}
на сайте online.hse.ru будет контрольная.
Работы принимаются до 12^{00} (до 11^{50})

Вход только по паролю из письма
(или по Вашему паролю, который
Вы поменяли)

Вход через LMS **невозможен**!

Конформная теория коник



$i_\pm = (\pm i : 1)$

$f_1 f_2$ - веществ. фокусы

$f_3 f_4$ - невеществ. комплексно сопряжённые

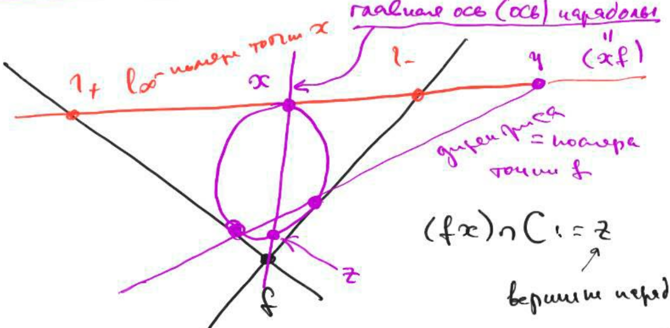
xyz - Δ ассоциированный с четырёхвершинником, образованным точками касания

xyz - автополярен относительно коники

x и y они перпендикулярны отн. евклидовой структуры
т.к. $[x, y, i_+, i_-] = -1$.

x и y легко найти явно если задано уравнение коники $x = (x_1 : x_2)$ $y = (x_2 : -x_1)$

$x B_\infty y = 0$ ← это квадратное уравнение на x.



главная ось (ось) параболы
$\overset{\shortparallel}{(xf)}$
l_∞ - поляра точки x
i_+
i_-
x
y
директриса = поляра точки f
z
f

$(fx) \cap C = z$

↗ вершина параболы

x, y сопряжены относит. C.

$\boxed{y \text{ - полюс прямой } (fx)}$ ⇐ т.к. $y = l_\infty \cap$ директр

↗ поляр x ↗ поляр f

⇓

x и y перпендикулярны ⇐ $[x, y, i_+, i_-] = -1$

Матрица Грама C в базисе $x\,y\,z$

плоскость, натянутая на x, z - гиперболическая плоскость. $y = (xz)^\perp$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & & 1 \\ & a & 0 \\ 1 & & \end{matrix}}$$

если x_0, x_1, x_2 - однор. координаты отн. $x\,y\,z$

$$2x_0x_2 = x_1^2 \cdot a$$

в карте $\boxed{x_2 = 1}$

$\boxed{2x = y^2 \cdot a}$ ← уравнение параболы

в аффинной системе координат с центром в вершине $\underline{z}$ и осями, направленными вдоль оси параболы и перпендикулярно ей (= по касательной в вершине)

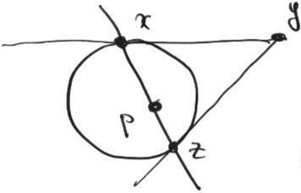
Как их явно искать! x — это полюс прямой ℓ_∞

координаты полюса прямой ℓ_∞ — это верхняя строка матрицы $B^\vee$ — присоединённая матрица Матрицы Грама коники C

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} \\ \hline \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{array}\right)$$

$$x = \Big(\Delta_{12} = 0,\ \underbrace{\overset{(x_1,\, x_2)}{\beta_{02}\beta_{12} - \beta_{01}\beta_{22},\ \beta_{01}\beta_{22} - \beta_{02}\beta_{12}}}_{\text{направление оси}}\Big)$$

$y = (-x_2 : x_1)$ — направление касательной в вершине.



xz — поляра точки y

у неё уравнение с к-тами

$$(0, -x_2, x_1) \cdot B = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$$

явное уравнение оси

найти на этой прямой точку $z \in C$ $\longrightarrow$ $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$

Способ: указать какую-нибудь точку на этой прямой, отличную от x ($x_0 \neq 0$)

$$p = (-\alpha_1 : \alpha_0 : 0)$$

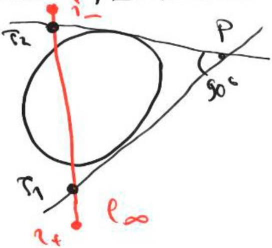
$x_2 = 0$

(или $x_1 = 0$)

если $q(p)=0$, $z=p$

если $q(p)\neq 0$, $\boxed{z=\sigma_p(x)=x-2\frac{\tilde{q}(x,p)}{\tilde{q}(p,p)}\cdot p}$

Пример: Найти ГМТ из которых коника видна под прямым углом (это ГМТ наз. директором коники)



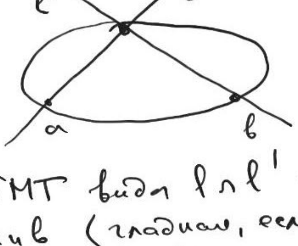
p: $[T_1, T_2, i_+, i_-] = -1$

где T_1, T_2 – направления касательных, опущенных из p.

$\forall$ точек a и b коника C задаёт гомографию

$$C: a^* \longrightarrow b^* \;:\; l \ni a \longmapsto (bp),$$ где p – полюс прямой l

пучки прямых, проходящих через a и b



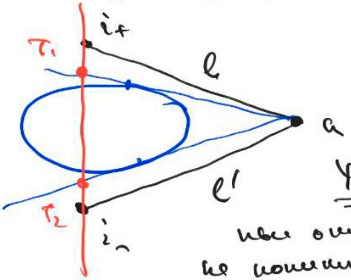
l' – сопряжённая l прямая через b (l' проходит через полюс прямой l)

ГМТ вида $l \cap l'$ – это коника, прох. через a и b (гладкая, если (ab) не переходит в себя, распадается в прямую (ab) и ещё одну прямую если гомография – перспектива).

$C : i_+^\times \to i_-^\times$ $\quad l \ni i_+ \to l' = (i_- p)$

где p - полюс l

$a = l \cap l'$



Утв: Касательные опущенные из a на конику перпендикулярны $\Leftrightarrow$ a явл. точкой пересечения соответственных прямых гомографии

$C : i_+^\times \to i_-^\times$

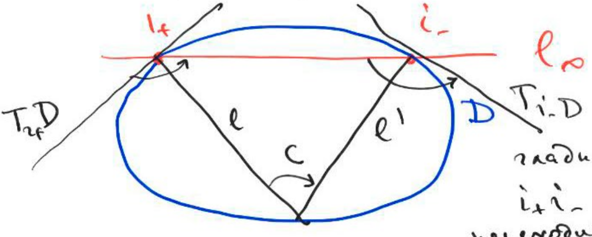
Док-во: $C : a^\times \to a^\times$ - аналогично инволюции сопряжения коникой C.

T_1, T_2 - неподвижные точки

$l \leftrightarrow l'$ (т.к. l и l' сопряжены отн. C).

$[T_1, T_2, i_+, i_-] = -1$

ТМТ a : C видна из a под прямым углом — это коника, прох. через i_+ и i_-



гладкая $\Leftrightarrow$ $i_+ i_-$ не переходит в себя $\Updownarrow$ коника центральная.

$T_{i_+}D \cap T_{i_-}D$ = полюс прямой l_∞ относительно D.

D - окружность.

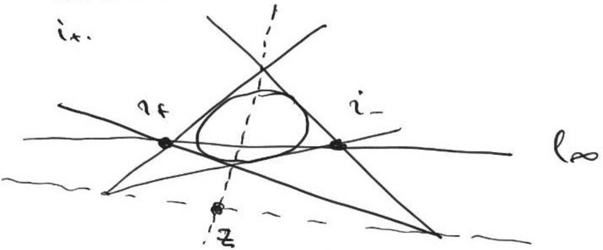
полюс l_∞ отн. D такой же как и относительно C

Ответ: Директор - это окружность с тем же центром, что и коника C (если коника центральная).

▷

$$C:\ i_+^* \longrightarrow i_+^*$$ сопряжение прямых коникой C

неподвижные точки - это 2 касательных из i_+.



$$[T_{\underline{\underline{i_+}}}D,\ l_\infty,\ h_1^+,\ h_2^+] = -1$$

касательные из i_+ к C

$T_{i_+}D$ проходит через полюс l_∞ относит. C.

$$[T_{i_-}D,\ l_\infty,\ h_1^-,\ h_2^-] = -1$$

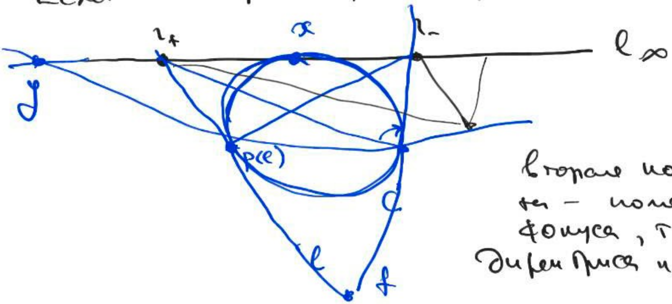
$T_{i_-}D$ проходит через полюс l_∞ отн. C.

$$T_{i_-}D \cap T_{i_+}D = z$$ полюс прямой l_∞ относит. C

$\parallel$

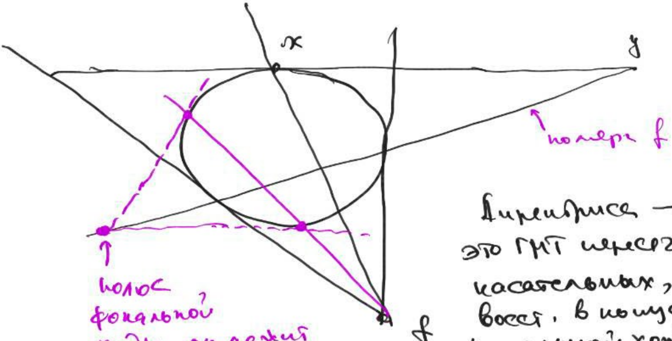
полюс l_∞ отн. D.

Если C - парабола, то D распадается:

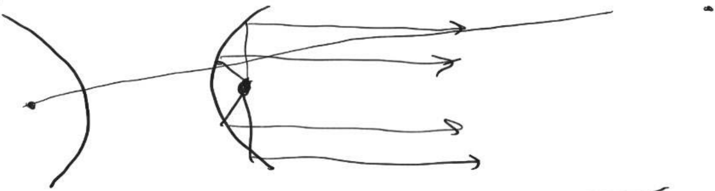


вторая компонента — поляра фокуса, т. е. директриса параболы

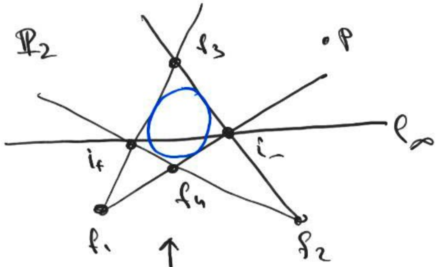
Директор — это директриса.



Директриса — это ГМТ пересечения касательных, восст. в концах фокальной хорды, причём эти касательные пересекаются на директрисе под прямым углом.



Как устроено семейство конфокальных коник
(т.е. всех коник с фиксированными 4 фокусами).

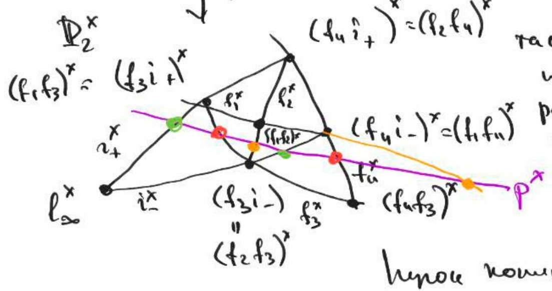


Семейство коник, касающихся 4 фиксир. прямых.

↓

$C^* \subset \mathbb{P}_2^*$ проходит через 4 точки

двойств.


$\mathbb{P}_2^*$
$(f_4 i_+)^* = (f_2 f_4)^*$
$(f_1 f_3)^* = (f_3 i_+)^*$
f_1^*
f_2^*
$(f_4 i_-)^* = (f_1 f_4)^*$
$(f_1 f_2)^*$
i_+^*
f_4^*
p^*
l_∞^*
i_-^*
$(f_3 i_-)$ = $(f_2 f_3)^*$
f_3^*
$(f_4 f_3)^*$

такие C^* образуют пучок, порождённый распавшимися кониками

Пучок коник C^* задаёт на прямой p^* инволюцию Дезарга $x \leftrightarrow y$: x и y сопряжены отн. некоторой коники из пучка.

$(pf_3) \leftrightarrow (pf_4)$
$(pi_+) \leftrightarrow (pi_-)$
$(pf_1) \leftrightarrow (pf_2)$.

$\exists$ ровно 2 коники, касающиеся прямой p^*

В софокусном семействе через любую точку проходит ровно 2 коники. Причём пересекаются оси под прямым углом

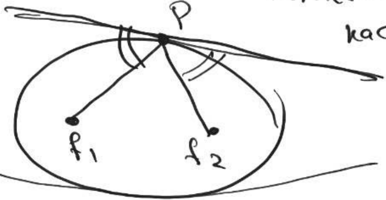
неподвижные точки инволюции в $P^\vee$

$$-1 = (pf_1, pf_2, T_pC_1\ T_pC_2)$$

$$-1 = (pf_3, pf_4, T_pC_1\ T_pC_2)$$

$$-1 = (pi_+, pi_-, T_pC_1\ T_pC_2)$$

перпендикулярность касательных



фокальное свойство центральных коник