

### Аффинные квадрики

**Терминология.** Пусть аффинная квадратика  $Q \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  задаётся неоднородным квадратичным уравнением  $b_2(x_1, \dots, x_n) + b_1(x_1, \dots, x_n) + b_0 = 0$ , где

$$b_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij}x_i x_j \in S^2V^*, \quad b_1(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{j=1}^n \beta_{0j}x_j \in V^*, \quad b_0 = \beta_{00} \in \mathbb{k}.$$

Положим  $W = \mathbb{k} \cdot e_0 \oplus V$ ,  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ , отождествим  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  со стандартной аффинной картой  $U_0 \subset \mathbb{P}_n$  и обозначим через  $L_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_n \setminus U_0$  бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$ . Проективное замыкание  $\bar{Q} \subset \mathbb{P}_n$  имеет в базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$  матрицу Грама  $B = (\beta_{ij})$  с  $0 \leq i, j \leq n$ , которая называется *расширенной матрицей Грама* аффинной квадрики  $Q$ . Пересечение  $Q_\infty = \bar{Q} \cap L_\infty$  имеет в базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрицу Грама  $B_\infty = (\beta_{ij})$  с  $1 \leq i, j \leq n$ , которая называется *асимптотической матрицей Грама* аффинной квадрики  $Q$ . Аффинная квадратика  $Q$  называется *гладкой центральной*, если обе квадрики  $\bar{Q}, Q_\infty$  гладкие<sup>1</sup>, *параболоидом* — если  $\bar{Q}$  гладкая, а  $Q_\infty$  особая<sup>2</sup>, *(простым) конусом* — если  $\bar{Q}$  особая, а  $Q_\infty$  гладкая<sup>3</sup>, *цилиндром* — если обе квадрики  $\bar{Q}, Q_\infty$  особые<sup>4</sup>. Гладкая вещественная центральная аффинная квадратика  $Q$  называется *эллипсоидом*, если  $Q_\infty = \emptyset$ , и *гиперболоидом*, если  $Q_\infty \neq \emptyset$ .

Через  $Q_{n,m} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$  обозначается гладкая вещественная проективная квадратика размерности  $n$  и планарности<sup>5</sup>  $-1 \leq m \leq n/2$ . Всякая гладкая вещественная проективная квадратика проективно конгруэнтна одной и только одной квадратике  $Q_{n,m}$ .

Невырожденная вещественная аффинная квадратика<sup>6</sup>  $Q$  с точностью до аффинной конгруэнтности определяется классами проективной конгруэнтности квадратик  $\bar{Q}$  и  $Q_\infty$ , причём если  $\bar{Q} = Q_{n,m}$ , то либо  $Q_\infty = Q_{n-1,m}$ , либо  $Q_\infty = Q_{n-1,m-1}$ , либо  $Q_\infty$  является простым конусом над  $Q_{n-2,m-1}$ . Последнее равносильно тому, что аффинная квадратика  $Q$  является параболоидом.

Вещественный аффинный конус  $Q$  с точностью до аффинной конгруэнтности определяется классом проективной конгруэнтности своей асимптотической квадратикой  $Q_\infty$ .

Всякий цилиндр  $Q \subset \mathbb{R}^n$  является прямым произведением аффинного подпространства  $\mathbb{R}^s \subset \mathbb{R}^n$ , проективизацией пространства направлений которого служит<sup>7</sup>  $L_\infty \cap \text{Sing } \bar{Q}$ , и нецилиндрической аффинной квадратикой  $Q_{\text{red}}$  в трансверсальном к  $\mathbb{R}^s$  аффинном подпространстве  $\mathbb{R}^{n-s} \subset \mathbb{R}^n$ .

**ГС20♦1.** Покажите, что у гладкой проективной квадрики  $Q_{n,m} = V(q) \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$  планарность  $m$ , размерность  $n$  и абсолютная величина индекса<sup>8</sup>  $\iota$  квадратичной формы  $q$  связаны соотношением  $2m + \iota = n$ , и найдите ранг и планарность следующих вещественных двумерных проективных квадратик в  $\mathbb{P}_3$ :

- а)  $-5x_0^2 - 8x_0x_1 + 16x_0x_2 + 2x_0x_3 + x_1^2 + 18x_1x_2 - 8x_1x_3 - 11x_2^2 - 10x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$
- б)  $8x_0^2 - 14x_0x_1 + 6x_0x_2 - 22x_0x_3 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 22x_1x_3 - 10x_2^2 - 18x_2x_3 + 14x_3^2 = 0$
- в)  $-3x_0^2 + 2x_0x_1 - 12x_0x_2 + 20x_0x_3 - 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 22x_1x_3 - 15x_2^2 + 60x_2x_3 - 70x_3^2 = 0$
- г)  $-2x_0^2 + 14x_0x_1 + 6x_0x_2 - 4x_0x_3 - 24x_1^2 - 20x_1x_2 + 12x_1x_3 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2 = 0$
- д)  $-4x_0^2 - 12x_0x_1 + 24x_0x_2 + 4x_0x_3 - 8x_1^2 + 34x_1x_2 + 8x_1x_3 - 35x_2^2 - 14x_2x_3 = 0.$

**ГС20♦2.** Перечислите все 7 непустых вещественных «кривых второй степени» в  $\mathbb{R}^2$  и все 14

<sup>1</sup>В этом случае полюс  $z_* = (B_{0,0} : -B_{0,1} : \dots : (-1)^n B_{0,n})$  гиперплоскости  $L_\infty$  лежит в  $\mathbb{A}^n$  и является центром симметрии аффинной квадрики  $Q$ .

<sup>2</sup>В этом случае гиперплоскость  $L_\infty$  касается квадрики  $\bar{Q}$  в точке  $x_* = (0 : -B_{0,1} : \dots : (-1)^{n+1} B_{0,n})$ , которая одновременно является полюсом гиперплоскости  $x_0 = 0$  и одномерным ядром формы  $B_\infty$ .

<sup>3</sup>В этом случае квадратика  $\bar{Q}$  имеет единственную особую точку  $z_* \in \mathbb{A}^n$  и является простым конусом с вершиной в этой точке над гладкой асимптотической квадратикой  $Q_\infty \subset L_\infty$ .

<sup>4</sup>В этом случае  $Q = \mathbb{A}^s \times Q'$ , где аффинное пространство  $\mathbb{A}^s \subset \mathbb{A}^n$  имеет направляющим пространством векторное подпространство  $U = \ker B \cap V$ , а  $Q'$  — нецилиндрическая квадратика, лежащая в произвольном трансверсальном к  $U$  аффинном подпространстве  $\mathbb{A}^{n-s} \subset \mathbb{A}^n$ .

<sup>5</sup>Напомним, что *планарностью* проективной квадрики называется максимум  $m$  размерностей лежащих на этой квадратике проективных подпространств. Значение  $m = -1$  равносильно пустоте квадрики.

<sup>6</sup>Т. е. гладкая центральная квадратика или параболоид.

<sup>7</sup>В частности,  $s = 1 + \dim L_\infty \cap \text{Sing } \bar{Q}$ .

<sup>8</sup>Т. е. модуль разности между положительным и отрицательным индексами инерции.

непустых вещественных «поверхностей второй степени» в  $\mathbb{R}^3$  с точностью до аффинной конгруэнтности. Для каждого типа напишите по возможности самый простой пример аффинного уравнения, задающего квадрику этого типа.

**ГС20♦3.** Определите, к какому из четырнадцати типов относится аффинная поверхность, заданная в стандартных координатах на  $\mathbb{R}^3$  уравнением:

а)  $3x^2 - 14xy + 8xz - 12x + 17y^2 - 18yz + 28y + 6z^2 - 16z + 11 = 0$

б)  $-x^2 + 2xy + 10xz + 4x + 4y^2 - 34yz - 10y + 4z^2 - 6z - 3 = 0$

в)  $-x^2 + 6xy - 8xz + 2x - 7y^2 + 18yz - 11z^2 - 2z + 5 = 0$

г)  $2x^2 - 8xy - 2xz + 2x + 8y^2 + 4yz - 2y + z^2 + 7 = 0$

д)  $x^2 - 4xy - 2xz - 4x + 6y + 4z + 7 = 0$

е)  $2x^2 - 2xz + 2x + 3y^2 - 10yz - 2y + 9z^2 + 9 = 0$

ж)  $x^2 + 4xy - 4x + 4y^2 - 2yz - 8y - 4z^2 + 2z + 4 = 0$

з)  $2y^2 - 6yz - 2y + 5z^2 + 6z + 4 = 0$

и)  $x^2 - 4xy - 2xz + 2x + 3y^2 + 6yz - 6z - 4 = 0$

к)  $-x^2 - 2xy - 2xz + 6x - y^2 - 2yz + 4y - z^2 + 6z = 0$

л)  $x^2 - 4xy - 2xz - 4x + 5y^2 + 6y + 5z^2 + 8z + 5 = 0$

м)  $2xz - 2yz - 3z^2 + 4z = 0$

н)  $x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 2y = 0$

о)  $y^2 - 2yz + 2y + z^2 - 2z + 1 = 0$ .

Для гладких центральных поверхностей найдите центр, для парабол — направление оси, для конусов — вершину, для цилиндров — образующее векторное пространство, а также тип и размерность квадрики, служащей основанием цилиндра.

**ГС20♦4.** Перечислите все а) компактные б) несвязные аффинные квадрики в  $\mathbb{R}^3$ .

**ГС20♦5.** Покажите, что<sup>9</sup>:

а) любой эллипсоид  $Q \subset \mathbb{R}^n$  0-планарен и гомеоморфен сфере<sup>10</sup>  $S^{n-1}$

б) любой параболоид в  $\mathbb{R}^n$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^{n-1}$

в) 0-планарная проективная квадрика  $Q_{n,0} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$  гомеоморфна сфере<sup>11</sup>  $S^n$

г) 0-планарный гиперboloид  $Q \subset \mathbb{R}^n$  гомеоморфен<sup>12</sup>  $\mathbb{R}^{n-1} \times S^0 = \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \mathbb{R}^{n-1}$

д) однополостный гиперboloид  $1 + z^2 = x^2 + y^2$  в  $\mathbb{R}^3$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^1 \times S^1$ .

**ГС20♦6.** Покажите, что всякая непустая центральная гладкая аффинная вещественная квадрика гомеоморфна  $\mathbb{R}^k \times S^\ell$ , и объясните, как связаны числа  $k$  и  $\ell$  с сигнатурами матриц Грама  $B$  и  $B_\infty$ .

**ГС20♦7.** Покажите, что гладкие 0-планарная и 1-планарная квадрики в  $\mathbb{P}_3$  над полем  $\mathbb{F}_q$  состоят, соответственно, из  $q^2 + 1$  и  $(q+1)^2$  точек, и подсчитайте число решений уравнений из зад. ГС20♦1 над полями  $\mathbb{F}_5$ ,  $\mathbb{F}_7$ ,  $\mathbb{F}_{29}$  и  $\mathbb{F}_{31}$ .

<sup>9</sup>Если общий случай вызывает затруднения, сделайте эту задачу для  $n = 3$ .

<sup>10</sup>В частности, компактен.

<sup>11</sup>Подсказка: спроектируйте квадрику из лежащей на ней точки на проективную гиперплоскость и сравните результат со стереографической проекцией сферы на аффинную гиперплоскость.

<sup>12</sup>В частности, имеет две связные компоненты.