Евклидовы коники

Терминология. Рассмотрим евклидову плоскость $V = \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек комплексного координатного пространства $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, которое вложим в качестве аффинной карты U_0 в комплексную проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Прямая $x_0 = 0$ на $\mathbb{P}_2$ называется *бесконечностью* и обозначается $\ell_\infty = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$. Точки $\iota_\pm \overset{\text{def}}{=} (\pm i : 1) \in \ell_\infty$, из которых состоит евклидова коника $x_1^2 + x_2^2 = 0$, называются *изотропными направлениями*. На ℓ_∞ имеется инволюция *перпендикулярности*[1] (её неподвижные точки — изотропные направления). Коника на $\mathbb{P}_2$ называется *вещественной*, если её уравнение в координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ имеет вещественные коэффициенты. Гладкая вещественная коника называется, соответственно, *параболой*, *гиперболой*, *эллипсом*, если она касается бесконечности ℓ_∞ или пересекает её по двум вещественным или двум комплексно сопряжённым точкам. Точки пересечения $C \cap \ell_\infty$ называются *асимптотическими направлениями* коники C. Точка $f \in \mathbb{P}_2$ называется *фокусом* гладкой вещественной коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если прямые $(f\iota_\pm)$ касаются C. Поляры фокусов называются *директрисами*. Полюс z_* бесконечно удалённой прямой ℓ_∞ называется *центром* коники. Прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами*. Гладкие коники C с конечным центром (гиперболы и эллипсы) называются *центральными*. Такая коника C задаёт на прямой ℓ_∞ инволюцию *сопряжённия коникой C* (её неподвижные точки — асимптотические направления). Два одновременно сопряжённых и перпендикулярных друг другу диаметра называются *главными осями* гладкой центральной коники.

ГС19⋄1. Покажите, что перпендикулярность вещественных векторов $u, w \in \ell_\infty$ равносильна

а) их сопряжённости относительно евклидовой коники $x_1^2 + x_2^2 = 0$

б) гармоничности их направлений с изотропными направлениями $\iota_\pm$.

ГС19⋄2. Убедитесь, что для вещественных векторов $u, w \in \ell_\infty$ двойное отношение $[u, w, \iota_+, \iota_-]$ лежит на единичной окружности[2] в $\mathbb{C}$, и евклидов угол $\measuredangle(u, w) = \pm\frac{1}{2}\operatorname{Arg}[u, w, \iota_+, \iota_-]$ с точностью до знака равен половине аргумента[3] двойного отношения.

ГС19⋄3. Убедитесь, что центральная коника C имеет четыре фокуса, два из которых (назовём их f_1, f_2) вещественны, а два других (назовём их f_3, f_4) не вещественны и комплексно сопряжены, причём прямые $(f_1 f_2)$ и $(f_3 f_4)$ пересекаются в центре z_* коники и пересекают бесконечность ℓ_∞ по вещественным точкам x_* и y_*, задающим направления главных осей коники C. Кроме того, точки x_* и y_* являются полюсами фокальных прямых $(f_3 f_4)$ и $(f_1 f_2)$ соответственно, а треугольник $\triangle\, x_* y_* z_*$ автополярен относительно C, см. рис. 1⋄1. Верно ли, что поляры изотропных точек $\iota_\pm$ тоже пересекаются в центре коники?

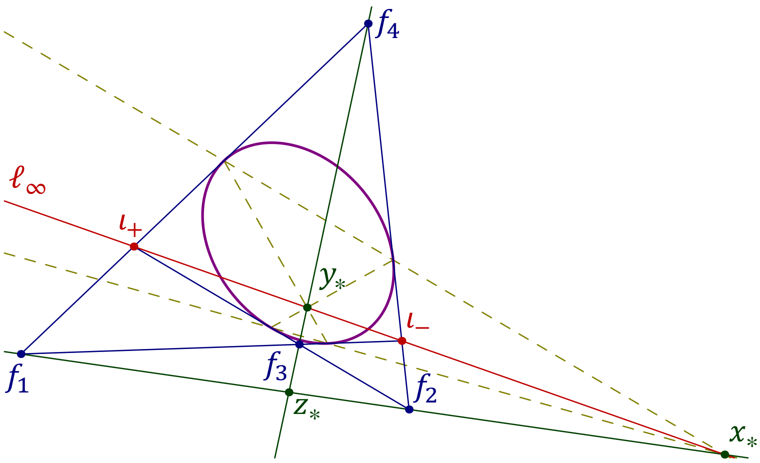

Рис. 1⋄1. Гладкая центральная коника (эллипс или гипербола).

[1] Переводящая одномерное подпространство в V в евклидово перпендикулярное одномерное подпространство.

[2] Т. е. обратно своему комплексно сопряжённому.

[3] Напомню, что всякое число, лежащее на единичной окружности в $\mathbb{C}$, имеет вид $z = e^{i\vartheta}$ для некоторого $\vartheta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, и класс $\operatorname{Arg} z = -i \ln z \overset{\text{def}}{=} \vartheta + 2\pi\,\mathbb{Z}$ называется *аргументом* числа z.

ГС19⋄4. Найдите фокусы, директрисы, центр и асимптоты евклидовых коник

$$2x = y^2\,, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

ГС19⋄5. Покажите, что диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные сопряжённому диаметру.

ГС19⋄6 (окружности). Для гладкой непустой вещественной коники C докажите равносильность свойств: **а)** C проходит через $\iota_\pm$ **б)** C центральна и имеет более одной пары главных осей **в)** C центральна и любые два её сопряжённых диаметра перпендикулярны.

ГС19⋄7. Сформулируйте и решите аналог зад. ГС19⋄3 для параболы: сколько у параболы фокусов, директрис, кто такие главные оси, и как всё это располагается, см. рис. 1⋄2

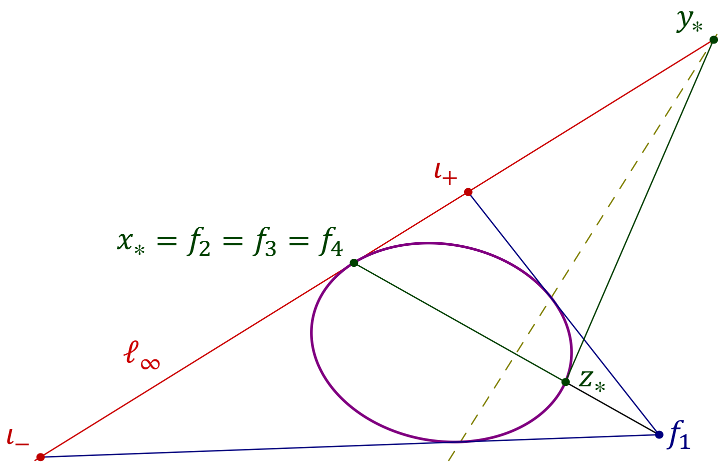

Рис. 1⋄2. Парабола.

ГС19⋄8. Дайте определение оси параболы и покажите, что в конечной точке ось пересекает параболу под прямым углом, а касательные, восстановленные в концах любой фокальной[4] хорды, пересекаются под прямым углом на директрисе.

ГС19⋄9. Парабола на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) пересекает гиперболу $xy = 1$ точке $(2, 1/2)$, и никаких других точек пересечения даже на комплексной проективной плоскости у них нет. Напишите уравнение этой параболы и найдите её фокус и директрису.

ГС19⋄10. На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ опишите ГМТ пересечения всевозможных пар перпендикулярных касательных к трём коникам из зад. ГС19⋄4.

ГС19⋄11. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ выясните тип евклидовой коники

$$x^2 + y^2 + 1 = \lambda(2x - x^2 - 2y^2 - 2xy)$$

и опишите геометрическое место центров всех центральных кривых из этого пучка.

ГС19⋄12. Под каким углом пересекаются касательные к

а) конике $9x^2 + 28xy - 6x + 21y^2 - 10y = -1$, опущенные из точек $(3, -2)$ и $(0, 1/3)$

б) конике $9x^2 + 28xy - 6x + 21y^2 - 10y = -1$, опущенные из точки $(-2, 2)$

в) конике $x^2 - 4xy + 4x + 4y^2 - 6y = -4$, опущенные из точек $(-4, -2)$ и $(-2, -1/2)$

г) конике $x^2 - 4xy + 4x + 4y^2 - 6y = -4$, опущенные из точки $(-5/2, -1)$.

[4] Т. е. проходящей через фокус.