Пучки коник

Терминология. Основное поле $\Bbbk$ по умолчанию предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль. Проективные подпространства в пространстве $\mathbb{P}(S^d V^*)$ гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}(V)$ называются *линейными системами* гиперповерхностей. Линейные системы размерностей 1, 2 и 3 называются *пучками, связками* и *сетями* соответственно. Пересечение всех гиперповерхностей линейной системы называется *базисным множеством* этой системы.

ГС18◇1 (сеть окружностей). Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ как множество вещественных точек комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$, вложенной в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0. Найдите на $\mathbb{P}_2$ две точки $\iota_\pm$, через которые проходят все евклидовы окружности, и докажите, что каждая гладкая коника, проходящая через точки $\iota_\pm$ и пересекающая $\mathbb{R}^2$, видна в $\mathbb{R}^2$ как окружность.

ГС18◇2. Верно ли, что все коники, проходящие через точки $(1:1:0)$, $(1:0:1)$, $(0:1:1)$ и точку **а)** $(1:1:1)$ **б)** $(2:1:1)$ образуют пучок? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС18◇3. Могут ли все коники в пучке быть вырожденными? Пусть в пучке есть хоть одна гладкая коника. Может ли в нём быть ровно **а)** 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4 вырожденные коники? Если да, приведите явный пример такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС18◇4. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по **а)** 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4 **е)** 5 точкам? Если да, приведите явные примеры таких коник, если нет, объясните, почему.

ГС18◇5. Может ли пучок коник содержать ровно одну особую конику, не являющуюся двойной прямой? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС18◇6. Напишите явное однопараметрическое уравнение пучка коник с тремя базисными точками. Сколько особых коник может быть в таком пучке?

ГС18◇7. Образуют ли пучок коники, касающиеся прямых $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$, соответственно, в точках **а)** $(0:1:0)$ и $(1:0:0)$ **б)** $(0:0:1)$ и $(1:0:0)$? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС18◇8. Напишите уравнение коники, проходящей

а) через точки $(1:1:0)$, $(1:0:1)$, $(0:1:1)$, $(1:1:1)$, $(1:-2:3)$

б) через точки $(1:1:0)$, $(1:0:1)$, $(0:1:1)$ и касающейся прямой $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ в точке $(1:-2:1)$

в) через точку $(1:2:3)$ и касающейся прямых $x_0 = x_1$ и $x_1 = x_2$, соответственно, в точках $(1:1:0)$ и $(0:1:1)$.

Много ли таких коник? Если одна, то гладкая ли она? Если да, то чем: эллипсом, гиперболой или параболой она изображается в стандартной аффинной карте U_0?

ГС18◇9*. Покажите, что особые точки гиперповерхности[1] $\Sigma \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ особых коник в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ суть двойные прямые и только они, и покажите, что касательное пространство[2] к Σ в гладкой точке, представляющей собою распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$, состоит из всех коник, проходящих через точку $\ell_1 \cap \ell_2$.

ГС18◇10*. Найдите размерность линейной системы кубических кривых в $\mathbb{P}_2$, проходящих через фиксированные, не лежащие на одной конике шесть точек, никакие три из которых не коллинеарны.

---

[1] Точка p гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{P}_n$ называется *особой*, если ограничение многочлена f на любую проходящую через p прямую либо тождественно нулевое, либо имеет кратный корень в точке p.

[2] Касательное пространство $T_p S$ к гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{P}_n$ в точке $p \in S$ есть объединение всех проходящих через p прямых, на которые многочлен f ограничивается либо в тождественный нуль, либо в многочлен, имеющий кратный корень в точке p.